VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



A. CLAIRAUT

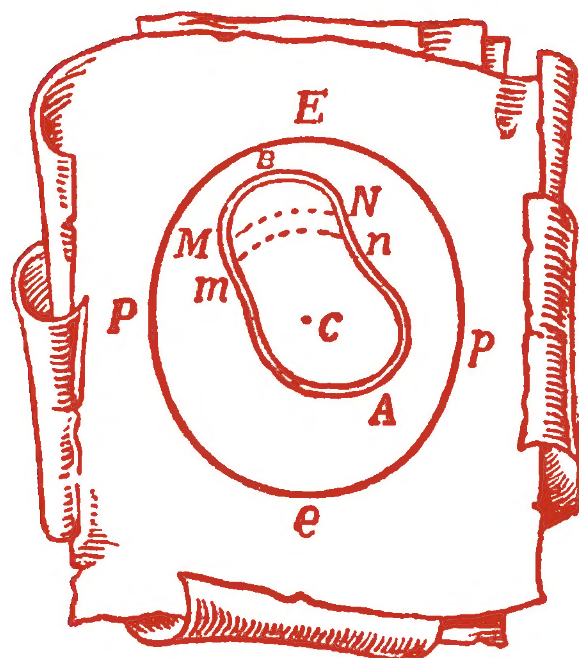
THÉORIE DE LA FIGURE DE LA TERRE TIRÉE DES PRINCIPES DE L'HYDROSTATIQUE



А. КЛЕРО

ТЕОРИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ, ОСНОВАННАЯ НА НАЧАЛАХ ГИДРОСТАТИКИ

ПЕРЕВОД
Н. С. ЯХОНТОВОЙ
КОММЕНТАРИИ И РЕДАКЦИЯ
Н. И. ИДЕЛЬСОНА



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1947

Под общей редакцией Комиссии Академии Наук СССР
по изданию научно-популярной литературы
Председатель Комиссии президент Академии Наук СССР
академик *С. И. ВАВИЛОВ*
Зам. председателя член-корреспондент Академии Наук
СССР *П. Ф. ЮДИН*


ТЕОРИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ
* А. КЛЕРО *

Графу де Морепа,

Министру и Государственному секретарю
по делам Флота,
Командору королевских орденов

Монсеньёр,

Покровительство, оказываемое Вами наукам, и благорасположение, которым Вы меня удостаиваете, не являются единственными причинами, побуждающими меня преподнести Вам это сочинение.

Нет, Монсеньёр, оно принадлежит Вам по праву. Я поставил себе задачей извлечь в нем новые и полезные выводы из столь известных теперь работ, произведенных для определения фигуры Земли. Поэтому совершенно справедливо, что я открыто посвящаю его тому, под чьим благосклонным началом и покровительством были выполнены все эти операции.

С глубоким уважением
Ваш нижайший и покорнейший слуга
КЛЕРО

Введение

Когда мы представляем себе все то, что образует внешнюю поверхность нашей планеты — материки, моря, озера, горы, реки и так далее, то на первый взгляд мы склонны считать, что все исследования, которые можно провести в теории для определения фигуры Земли, являются бесполезными отвлеченными рассуждениями, так что даже современные [геодезические] измерения позволят нам узнать только очень малые части ее поверхности, не давая возможности вывести какое-либо заключение обо всей Земле в целом.

Но если затем обратить внимание на то, что моря со всех сторон сообщаются между собой; что берега очень мало возвышаются над уровнем моря; что высота самых больших гор совершенно ничтожна по сравнению с диаметром Земли; что скат русла самых больших рек не требует, чтобы их истоки находились над уровнем моря выше, чем горы,* то мы быстро придем к заключению, что фигура Земли должна подчиняться законам гидростатики; что операции, произведенные для ее

* Для того чтобы пояснить на примере это утверждение, я замечу, что скат реки Сены, уровень которой был определен так тщательно Пикаром, составляет один фут на 1000 туазов. Если мы представим себе реку в два или три раза более быструю, длиною в 2000 лье, то высота истоков над устьем не будет превышать одного лье.

От Редакции. Все подстрочные примечания, если не оговорено, принадлежат Клеро.

измерения, должны дать приблизительно те же результаты, как если бы они производились на поверхности воды, застывшей после того, как она приняла форму, соответствующую условиям равновесия.

Но не допускают ли законы гидростатики, чтобы эта масса воды имела неправильную форму, чтобы она была сжата у одного полюса, вытянута у другого и чтобы меридианы не были подобны друг другу? Ведь в этом случае измерения, произведенные в Лапландии, во Франции и в Перу, не дадут нам представления об истинной фигуре Земли. Посмотрим же, что требуют законы гидростатики.

Из основных принципов этой науки вытекает, как известно, что жидкость может быть в покое только, если ее поверхность есть поверхность уровня, т. е. если она перпендикулярна к вертикальной линии, потому что тогда каждой капле нужно будет стекать под одинаковым уклоном, и в одном и в любом другом направлении.

Отсюда следует, что если бы сила, под влиянием которой все тела падают, была направлена всегда к одному центру, то Земля должна была быть совершенно сферической, с тем чтобы покрывающие ее воды были в равновесии; если же, напротив того, сила тяжести направлена по линии, не проходящей через центр, то Земля не будет уже сферической; но она будет иметь форму, необходимую для того, чтобы направление силы тяжести в каждой точке ее поверхности совпадало с направлением перпендикуляра к этой поверхности.

Таким образом, вопрос о фигуре Земли основан на законе действия силы тяжести. Если эта сила вызывается причиной, которая тянет тела то в одну, то в другую сторону и которая действует по-разному на разных меридианах, которая убывает и возрастает вне всяких правил, то мы никогда не сможем надеяться узнать фигуру Земли, и ни теория, ни практика не будут в состоянии ее определить.

Астрономия учит нас, что сила, удерживающая Луну в ее орбите, есть та же самая сила, которой вызывается

падение тел на земле; что эта сила действует во всей вселенной; что она влечет планеты к Солнцу и спутников к главным планетам. Но если эти проявления одной и той же силы подчиняются, как показывают астрономические наблюдения, постоянным законам, то разве не естественно предположить, что сила, действующая столь закономерно на небесные тела, действует таким же образом на поверхности и внутри Земли?

Более того, мы узнаём из наблюдений, произведенных в разных местах, что сила, под действием которой тела падают на землю, уменьшается от севера к югу, и что это уменьшение происходит закономерно. И хотя эти наблюдения дают нам возможность измерять только напряжение силы тяжести, но не ее направление, т. е. они не указывают, насколько эта сила отклоняет тела от прямой, проходящей через центр Земли, мы не должны, как мне кажется, сомневаться в том, что и направление этой силы подчиняется закону, столь же правильному, как и величина ее натиска. Отбросить все то, что раскрывают перед нами астрономические и географические наблюдения, и довериться гипотезе, по которой сила тяжести могла бы увлекать тела то в одну сторону, то в другую и превращала бы Землю в тело неправильной формы, — все это было бы совершенно неприемлемым для физика.

Но если все эти явления указывают нам, что сила тяжести действует закономерно, они не раскрывают нам в точности закона, по которому происходит ее действие на поверхности и внутри Земли; ибо мы увидим, что этот закон зависит от той физической системы, которую мы примем, и что, следовательно, одна только теория не может дать нам представления об истинной фигуре Земли.

Рассмотрим сначала, как действует сила тяготения* в системе вихрей и какова фигура Земли, соответствующая этой системе.

---

* Я делаю здесь то же различие между тяжестью и тяготением [гравитацией], как и г-н де Мопертюи („Фигура Земли, по наблюдениям Мопертюи, Клеро и других“); я понимаю под „силой тяжести“ естествен-

Знаменитый Декарт, который не поднялся, однако, до познания законов, которым подчиняются планеты в их движениях, полагал, что в явлении тяготения достаточно объяснить только одно это устремление всех земных тел к центру Земли; чтобы найти причину этого стремления, он предположил, что Земля окутана вихрем тонкой материи, которая непрерывно циркулирует; и так как эта материя в ее движении должна произвести усилие, чтобы удалиться от центра вихря, то тяжелые тела, имеющие меньшую центробежную силу, чем эта материя, уступают ее усилию и проталкиваются к центру Земли.

После того, как появился г-н Ньютон, просвещенные картезианцы вынуждены были признать, что сила тяжести распространена по всей вселенной; они согласились, наконец, с тем, что Луна — тяжелое тело, имеющее вес по отношению к Земле; что Земля и все планеты испытывают подобное же тяготение к Солнцу, как спутники к главным планетам. Будучи, кроме того, принуждены согласиться с тем, что все эти силы притяжения возрастают в той же мере, в какой убывают квадраты расстояний до центрального тела, они стали искать объяснения этих явлений из принципов декартовой системы.

По примеру Декарта они прибегли к центробежной силе вихрей тонкой материи, которыми окутана и пронизана каждая планета, и стали утверждать, что из этой центробежной силы вытекает закон квадратов расстояний, которому подчинены все тяжелые тела. Но так как по их системе тонкая материя увлекает тела к центру вихря и так как сила этой материи не зависит ни от величины, ни от плотности, ни от фигуры центрального тела, то, по мнению этих философов, одинаковому закону подчинены как тела, помещенные на поверхности или внутри Земли, так и тела, находящиеся вне ее, на значи-

---

ную силу, под действием которой всякое тело падает, и я называю тяготением силу, под влиянием которой это тело стало бы падать, если бы вращение Земли не изменяло ее величину и направление.

тельных расстояниях; все они устремляются к центру с силой, обратной квадрату расстояния до центра. Однако такой закон притяжения по необходимости требует, чтобы Земля обладала определенной фигурой [1].*

Для того чтобы найти эту фигуру, нужно начать с исследования изменений, которые вращение Земли вносит в направление и в величину силы тяготения.

Известно, что все тела, вращающиеся вокруг оси в одинаковое время, проявляют усилие, чтобы удалиться от этой оси, — усилие, пропорциональное их расстоянию от оси. Известно, сверх того, что на экваторе это усилие составляет 288-ю часть тяжести; отсюда легко вывести его величину в любом месте.

После этого, для определения силы, действующей на тяжелое тело в любой точке Земли, достаточно применить хорошо известное положение о том, что под действием двух сил тело движется по диагонали параллелограмма, две стороны которого представляют собою обе эти силы. Поэтому берут отрезок прямой линии, представляющий ту силу, с которой тело падало бы, если бы Земля не вращалась, и другой отрезок, изображающий усилие, происходящее от вращения Земли; на этих двух отрезках строят параллелограмм, диагональ которого дает направление, по которому тело падает в данном месте.

Затем уже для всех тех, кто владеет математикой, не представит затруднения определить фигуру Земли из условия, чтобы ее поверхность была везде перпендикулярна к направлению силы тяжести, т. е. чтобы эта поверхность была поверхностью уровня. В результате этих вычислений получается, что Земля представляет собою сфероид, сжатый у полюсов; его ось вращения относится к диаметру экватора, как 576 к 577. Такова, следовательно, фигура Земли, определенная на основании закона притяжения, выведенного из системы

* Ссылки указывают номер примечания в Комментарии (*Ред.*).

вихрей; так представляют его теперь новые картезианцы, признавшие только часть системы г-на Ньютона. Перейдем же теперь к фигуре Земли, как она получается по системе г-на Ньютона, если принять ее полностью.

Этот великий философ, выведя из аналогий Кеплера общий закон, по которому планеты притягиваются к их общему центру, исследовал его более детально и увидел, что он требует некоторых поправок, когда планеты оказываются в значительной близости друг к другу; что Луна, например, не движется в точности по той кривой, которую она описывала бы, если бы на нее действовало только притяжение Земли, и что Земля, в свою очередь, не движется по той орбите, которая определялась бы только действием Солнца, и так далее. Ньютон воспользовался самыми тонкими астрономическими соображениями, чтобы определить эти уклонения, и нашел, что они таковы, как этого требует математика, если предположить, что Луна притягивается не только Землей, но и Солнцем, и что Луна и Солнце воздействуют на Землю так же, как Земля и Луна на Солнце, предполагая все время их действие пропорциональным массе притягивающего тела и обратно пропорциональным квадрату расстояния.

Так как эти устремления планет друг к другу были раскрыты перед г-ном Ньютоном всеми явлениями, то он признал притяжение силой всемирной. Как следствие, он принял тот принцип, что каждая частица материи действует на все другие, находящиеся во вселенной, с силой, прямо пропорциональной ее массе и обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Отсюда легко заключить, что сила тяжести внутри и на поверхности Земли не направлена по прямой, проходящей через ее центр. Так как тело, помещенное в каком-либо месте Земли, притягивается одновременно всеми составляющими ее частицами, действующими под различными углами, в зависимости от их положения, и с большей или меньшей силой, соответственно их расстоянию, то притяжения всех этих частиц слагаются в одну силу, которая уже не притяги-

вает тела к центру Земли, но действует по прямой, которая тем более отклоняется от радиуса, чем больше Земля отличается от сферы; изменение этой силы от экватора к полюсу и от поверхности Земли к ее центру уже не будет происходить обратно пропорционально квадрату расстояния от центра; оно будет равнодействующей сил всех этих частиц, если учесть квадраты расстояния каждой из них до данного тяжелого тела.

Разумеется, здесь нужно отметить, что сумму притяжений всех частиц Земли, а следовательно, и притяжение всей Земли на тело, находящееся на большом расстоянии, например на Луну, всегда предполагают направленной к центру и действующей обратно пропорционально квадрату расстояния; но это происходит потому, что на расстоянии Луны оказывается совершенно неощутимым различие между фигурой Земли и сферой, так что в этом случае Землю рассматривают как точный шар;* но этого нельзя допускать для тел, находящихся на поверхности Земли или внутри нее.

Теперь уже очень легко усмотреть, что определение фигуры Земли в системе тяготения представляет собой задачу, весьма отличную от той, которую ставят в теории вихрей. Действительно, в гипотезе вихрей закон силы тяжести задается до определения фигуры Земли, в то время как в системе притяжения нужно определять одновременно и то и другое; ньютонианцы должны, таким образом, найти фигуру такого сфероида, чтобы частица, помещенная в любом месте его поверхности и подверженная одновременно действию центробежной силы и притяжению всех частиц сфероида,

---

* Для того чтобы это ясно понять, надо знать, что закон притяжения, согласно которому все материальные частицы взаимно притягиваются с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояний, обладает тем свойством, что две сферы любой массы притягиваются с такой же силой, как если бы вся масса каждой из них была сосредоточена в ее центре. Это предложение очень ясно доказано в одном мемуаре г-на де Мопертюи [2] (Мемуары Академии, 1732).

приняла в своем падении направление, перпендикулярное к этой поверхности.

Решая эту задачу, ньютонианцы находят, что Земля, как и в системе вихрей, должна быть сжата у полюсов; но отношение осей равно теперь 230 к 231, вместо 576 к 577, — разница довольно заметная [3].

Это расхождение в величине сжатия, получаемого в обеих системах, отнюдь не является единственным моментом, который оставался теоретически неясным для геометров до [геодезических] измерений, произведенных в последнее время; имелись и другие сомнения, тем более важные, что они ощущались каждым, кто принимал ту или другую систему; это то, что ньютонианцы не могли рассматривать отношение 230 к 231 как единственное, которое может дать их теория, и что картезианцы также не могли считать отношение 576 к 577 единственным следствием из их принципов. Рассмотрим эти вопросы сначала в отношении системы г-на Ньютона.

В этой системе для отношения осей получается значение 230 к 231 только потому, что массу Земли предполагают вполне однородной; однако легко возможно и даже весьма вероятно, что части Земли, самые близкие к центру, плотнее остальных. Так как сила тяжести есть равнодействующая притяжений на данное тело всех частей Земли, то в таком предположении бóльшая или меньшая плотность этих частей совершенно изменит закон, по которому притягиваются тяжелые тела; вследствие этого и отношение осей будет различным, в зависимости от различных распределений и различных плотностей внутренних частей Земли.

Для системы картезианцев эти соображения, как представляется на первый взгляд, не должны иметь значения; мы видели, что отношение осей, равное 576 к 577, которое у них получается, вытекает из предположения, что тела, помещенные на поверхности и внутри Земли, подвергаются совершенно такому же действию, как и тела, находящиеся на значительном расстоянии от ее центра; и действительно, все картезианцы

предполагали до сих пор, что нельзя получить другое отношение осей на основе их принципов. Однако все эти философы не ограничивают себя ни только что приведенными предположениями, ни какими-либо другими, и после всего того, что они смогли сделать с их тонкой материей, они отлично могут еще вообразить, что, когда эта материя проходит через внутренние части Земли, она действует уже иначе, чем снаружи, так что закон квадратов расстояний может не действовать для внутренних частей. Они могут также сказать, что тонкая материя, вместо того чтобы увлекать все тела к одному центру, направляет их по перпендикуляру к некоторому ядру, находящемуся в центре Земли, и тому подобное.

Итак, ни в системе вихрей, ни в системе тяготения нет возможности точно установить закон действия силы тяжести на поверхности и внутри Земли; следовательно, теория, сама по себе взятая, не может дать точного представления о фигуре Земли; однако без помощи теории, раскрывающей нам, что Земля должна иметь правильную форму, нельзя было бы опираться на измерения, произведенные теперь на севере и на юге для определения ее фигуры, и нужно было бы непрерывно производить измерения под всеми широтами и во всех долготах.

Выгоды, которые мы можем извлечь из теории, изучая вопрос о фигуре Земли, не ограничиваются тем, чтобы придать решающее значение новейшим геодезическим измерениям; зависимость, по необходимости существующая между этим вопросом и вопросом о силе тяжести, обнаруживает, что если истинная фигура Земли станет известной из нынешних измерений, то теория должна найти здесь яркие источники истины и для общего учения о Системе Мира.

Для того чтобы использовать совместно, в этих видах, и теорию и наблюдения, я попытался определить прежде всего отношение осей Земли и изменение силы тяжести на ее поверхности методом, пригодным для ~~любой~~ гипотезы

о тяготении; затем я сравнил результаты, получаемые из наиболее правдоподобных гипотез, с теми, к которым приводят нынешние измерения.

Первая польза, которую можно извлечь из этого сравнения, есть исключение большого числа гипотез относительно закона тяготения, на которых можно было бы остановиться из-за их простоты. Так, например, можно доказать, что необходимо отбросить все те гипотезы, согласно которым тела притягиваются к центру Земли, и притом, каков бы ни был закон этого притяжения; действительно, я показываю, что при всех этих предположениях отношение оси к диаметру экватора оказывается равным 576 к 577 или близким к нему. Но отношение осей, которое получается из сравнения длины градуса меридиана, выведенной из измерений в Лапландии и во Франции, слишком сильно отличается от отношения 576 к 577, чтобы оно могло быть к нему сведено, если предположить в наблюдениях только небольшие ошибки, которые могли в них проскользнуть; поэтому приходится отбросить все те гипотезы о законе действия тяготения, которые приводят к этому значению отношения осей.

Но сравнение теории с наблюдениями может принести пользу более существенную, чем исключение нескольких частных гипотез; оно, быть может, заставит нас окончательно склониться в сторону системы, которая и так уже имеет повидимому, столько оснований считаться правильной, — я имею в виду систему г-на Ньютона. Действительно, предполагая существование тяготения, я доказываю в этой работе [4], что при наиболее вероятных гипотезах относительно плотности внутренних частей Земли всегда существует такая зависимость между дробью, выражающей разность осей, и дробью, выражающей уменьшение силы тяжести от полюса к экватору, что если одна из этих дробей превосходит $^1/_{230}$, то вторая должна быть меньше $^1/_{230}$ и притом в точности на ту же самую величину. Но так как все опыты, проведенные для определения длины секундного маятника, показывают,

что уменьшение силы тяжести от полюса к экватору больше $^1/_{230}$, то следует заключить, что разность осей меньше $^1/_{230}$. Остается только выяснить, согласуется ли это заключение с нынешними измерениями; это мы узнаем после возвращения академиков, отправившихся в Перу, так как значительная разница, которая должна обнаружиться между длиной градуса меридиана, которую они измерили, и той, которую мы сами получили в Лапландии, должна дать нам истинное отношение осей.

Согласие нынешних геодезических измерений с теорией не есть единственное испытание, которое должна выдержать ньютонова система, прежде чем быть принятой; необходимо еще одно условие, которое дает только гидростатика. Необходимо исследовать, может ли по этой системе жидкость находиться в равновесии; из опыта мы знаем, что моря находятся в покое; ясно, что нужно было бы отбросить всякую систему, по которой сила тяжести такова, что жидкость не может находиться в равновесии. В этой работе будет показано, что все законы для силы тяжести, вытекающие из системы притяжения, таковы, что жидкости всегда приходят в состояние равновесия.

Как кажется, г-н Бугэ [5] сделал основательное замечание о том, что существуют и такие гипотезы о силе тяжести, при которых жидкости никогда не будут в равновесии. Этот искусный геометр, занимаясь определением фигуры планет в предположениях гораздо более общих, чем это делалось до него, нашел, что в бесконечном множестве случаев фигура, получаемая из условий равновесия всех столбов жидкости от центра до поверхности, не совпадает с фигурой, необходимой для того, чтобы поверхность во всех ее точках пересекалась перпендикулярно направлением силы тяжести; а так как оба эти условия одинаково необходимы, то он заключает, что планета может существовать в неизменном состоянии только при тех гипотезах, где эти условия приводят к одной и той же фигуре.

Но если мы примем вместе с г-ном Бугэ, что эти два условия, одинаково необходимые для равновесия жидкости,

не вытекают одно из другого, то не может ли оказаться, что существуют еще и другие условия, совершенно отличные от этих двух, но вместе с тем столь же необходимые?

Именно это соображение побудило меня обратиться к разысканию законов гидростатики, которые были бы совместны с любыми гипотезами о действии притяжения; эти исследования представлялись мне полезными и интересными,* независимо от их связи с фигурой Земли.

Я очень скоро убедился в том, что действительно, как я и предполагал, согласие двух обычных принципов, т. е. равновесия столбов и перпендикулярного направления силы к поверхности, еще недостаточно для равновесия жидкой массы; действительно, я нашел, что существует бесчисленное множество гипотез о действии притяжения, при которых эти два принципа дадут одну и ту же кривую, без того чтобы усилия от всех частей жидкости взаимно уравновешивались. Я нашел затем два общих и строгих способа для распознания тех гипотез о действиях притяжения, при которых жидкости могут находиться в равновесии, и для определения той фигуры, которой должны обладать планеты при этих гипотезах.

Прежде чем перейти к изложению обоих этих методов, уместно устранить затруднение, которое довольно естественно возникает по вопросу о вращении жидких масс. Легко понять, что если тело вынуждено описывать окружность, то оно прилагает для удаления от центра усилие, и что это усилие зависит от скорости и от радиуса окружности, по которой тело движется; поэтому, когда мы сочетаем, — как это было сделано выше, — притяжение на каждую частицу планеты с ее центробежной силой, мы принимаем, что эта частица вынуждена двигаться по кругу. Но почему эти частицы движутся все вместе?

---

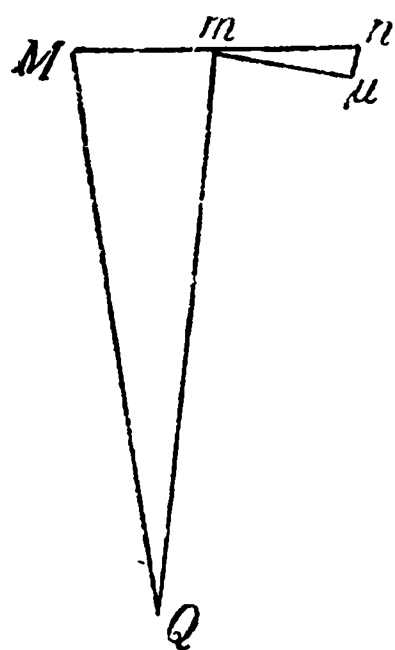
* В главе X первой части будет дан способ объяснения при помощи этой теории явлений в капиллярных трубках.

Легко видеть, каким образом твердое тело может сохранять свое вращательное движение. Для этого стоит только бросить взгляд на палочку с двумя грузиками, которым дают импульсы в противоположных направлениях, по величине обратно пропорциональные их массам. Те же самые принципы, которыми устанавливается, что эта палочка будет безостановочно вращаться вокруг своего центра тяжести, позволят легко установить, что если сообщить твердому телу надлежащий импульс, то оно будет безостановочно вращаться вокруг прямой, проходящей через его центр тяжести. Но если тело жидкое, то условия будут иными: каждая частица, не связанная с остальными, стремится двигаться отдельно от прочих вокруг точки, к которой устремляет ее сила тяготения: каждый атом ведет себя здесь как планета, которая описывает орбиту вокруг центрального тела вследствие импульса и под действием силы, которая влечет ее к центральному телу. Таким образом, все частицы, из которых состоит жидкая масса, стремятся описывать кривые, которые непрерывно пересекаются; отсюда должно было бы произойти общее смешение всего состава планеты. Чему же приписать правильное вращение вокруг оси? Нужно ли нам искать какую-то тонкую материю, которая захватывает все частицы планеты и несет их как бы в круговых трубках? Но тогда нужно было бы найти объяснение для вращения этой тонкой материи и доказать, что она не нарушает равновесия, а не то, что она его создает; надо было бы погрузиться во все затруднения Системы Мира. Только правила механики позволят нам разрешить все эти трудности.

Из самой фигуры планеты мы выведем возможность продолжения ее движения; будет показано, что эта фигура может быть такой, что все части жидкости, вместо того чтобы описывать пересекающиеся кривые, уравновесят друг друга, так что получится одинаковое давление по всем направлениям, и каждая из частиц не сможет совершать движения, отличного от общего движения всей массы. Правда, этим еще не будет

объяснено, каким образом планеты сами собой приняли их фигуры; но не будет ли нам достаточно узнать, как они могут их сохранить?

Вообразим сначала, что какой-нибудь атом планеты за бесконечно малый промежуток времени пробежал дугу Mm по окружности, центр которой Q лежит на оси вращения; если бы после этого он был предоставлен самому себе, то достоверно, что в следующий промежуток времени, равный первому, он прошел бы длину mn, равную Mm и являющуюся ее продолжением; но ясно также, что вместо силы, которая у него имелась, чтобы пробежать mn, можно подставить две других: одну, направленную по $m\mu$, которая заставляет атом описывать окружность радиуса Qm, и вторую, направленную по μn, параллельно Qm, которая стремится удалить атом от центра Q [фиг. 1].



Фиг. 1.

Предположим теперь, что все силы, подобные Mm, которыми обладали частицы в начальный момент, были пропорциональны их расстояниям MQ от оси; тогда очевидно, что ни эти силы, ни силы $m\mu$, которые возникают из них во второй момент, не могут ничего изменить во взаимном расположении частиц. Что касается сил μn, которые так же, как силы Mm, пропорциональны расстоянию от оси вращения, то они естественно должны были бы вызвать возмущение состояния планеты, так как действие их привело бы к удалению всех частиц жидкости от оси вращения. Однако легко видеть, что фигура планеты может быть такова, что это действие будет уничтожено. В самом деле, если эти силы μn, имеющиеся у всех частиц, происходят от действия силы тяготения, которыми эти же частицы обладают, и если всей жидкой массе придана форма, необходимая для того, чтобы все ее части под действием этого тяготения, уменьшенного на силы μn, были между собой в равновесии, то, как легко видеть, каждая частица, пробежав-

шая в первый момент малую часть окружности Mm, пройдет во второй момент следующую часть $m\mu$ той же окружности и так далее, так что вся планета будет вращаться безостановочно вокруг своей оси, не нарушая своего равновесия и не изменяя своей фигуры.

Таким образом, когда ставят задачу определения фигуры жидкой массы, вращающейся вокруг своей оси, то можно рассматривать эту массу как покоящуюся и как состоящую из частей, которые находятся не просто под действием тяготения, но еще и под действием силы, которая их удаляет от оси и которая по величине пропорциональна расстоянию до этой оси [6].

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ ВЫВОДА ТЕХ УСЛОВИЙ, ПРИ КОТОРЫХ ЖИДКОСТИ МОГУТ НАХОДИТЬСЯ В РАВНОВЕСИИ, И ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ И ДРУГИХ ПЛАНЕТ ПРИ ЗАДАННОМ ЗАКОНЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ



Глава I

Изложение общего принципа, соблюдение которого необходимо для равновесия жидкостей, с предварительными предложениями о применении этого принципа

§ 1

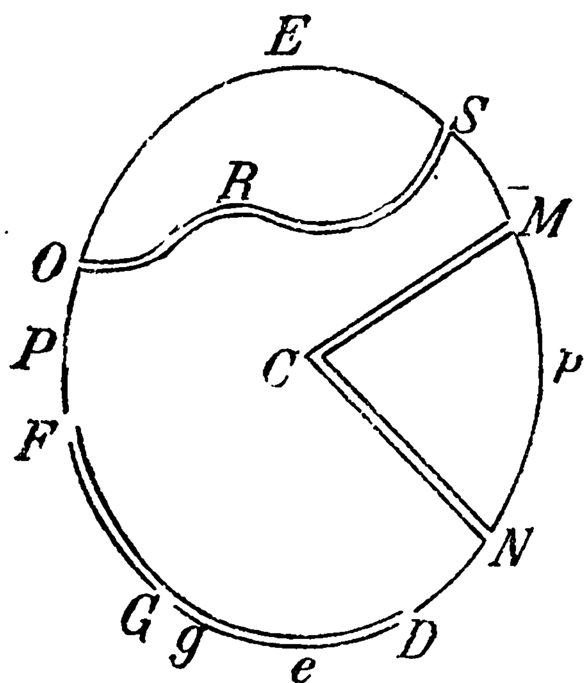
Жидкая масса не может быть в равновесии, если только усилия всех частей внутри воображаемого канала любой формы, проходящего через всю массу жидкости, не уничтожаются взаимно.

Так как вся масса $PEpe$ [фиг. 2] предполагается в равновесии, то любая часть жидкости может отвердеть, причем остальная ее часть не изменит своего положения. Предположим, что вся масса затвердеет, кроме части жидкости, необходимой для образования канала ORS. Следовательно, такой канал будет в равновесии; но это может случиться только, если усилия части OR по направлению к выходу S будут равны усилиям части SR по направлению к O.

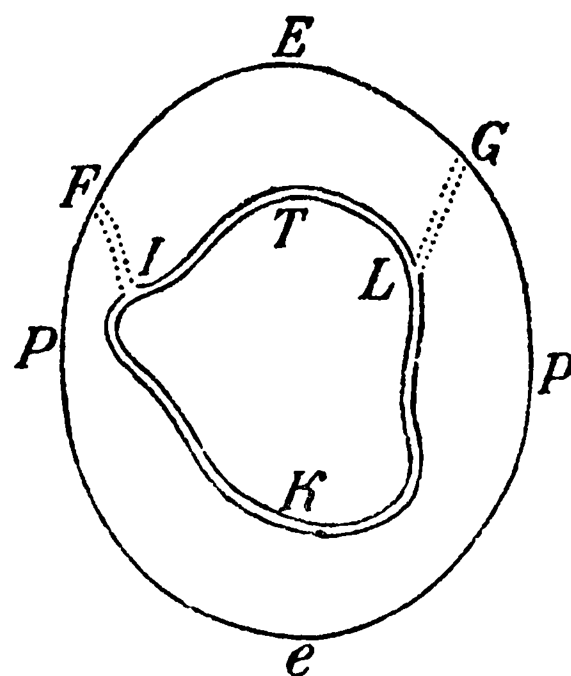
§ 2

Совершенно очевидно, что оба принципа, применяемые обычно для определения фигуры Земли, уже содержатся

в только что изложенном мною. Рассмотрим сначала первый из них — именно принцип г-на Ньютона; он заключается в том, чтобы привести к равенству вес любых двух столбов *MC*, *NC*, которые доходят до центра [фиг. 2]. Но эти два столба образуют вместе канал *MCN*, который так же, как канал *ORS*, соединяет две произвольные точки поверхности; поэтому ясно, что как только фигура *PEpe* примет ту форму, при которой любой канал будет в равновесии, то можно быть уверенным, что столбы *MC* и *NC* будут одинакового веса.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Что касается второго принципа, установленного г-ном Гюйгенсом, то он основывается на том, что кривая *PEpe* должна во всех точках пересекаться перпендикулярно направлением силы тяжести. Но я утверждаю, что этот принцип необходимо вытекает из условия равновесия любого канала. Действительно, предположим, что какой-либо канал *ORS* [фиг. 2] превратился в канал *FGD*, расположенный вдоль поверхности жидкости; он должен быть в равновесии, как и все остальные. Но это может произойти только при двух следующих условиях: либо оттого, что сила тяжести в каждой точке *G* перпендикулярна к направлению канала *Gg*, либо оттого, что часть *FG*, толкающая жидкость к *D*, уравновешивается частью *GD*, толкающей ее к *F*. Но это второе условие не может иметь места

так как, раз ничто не ограничивает длины канала, необходимо, чтобы часть *FG* сама по себе была в равновесии, так же как и вся длина *FGD*; что не случилось бы, если бы *FGD* было в равновесии только вследствие равенства давлений *FG* и *DG* [7].

§ 3

Для того чтобы жидкая масса могла быть в равновесии, необходимо, чтобы усилия всех частей жидкости, заключенных в любом замкнутом канале, взаимно уничтожались.

Это предложение, так же как и установленное в § 1, основано на том, что общее равновесие всей массы жидкости необходимо требует равновесия всех ее частей. Предположим поэтому, что вся жидкость затвердела, кроме какого-нибудь замкнутого канала. Очевидно, что если вся масса жидкости была в равновесии, то жидкий канал, оставшийся после затвердения соседних частей, должен также быть в равновесии. Это означает, что если на этом канале взять две произвольные точки *I*, *L* [фиг. 3], то усилия двух частей *IKL*, *ITL*, направленные друг к другу, между собой равны; иначе в этом канале происходил бы непрерывный поток жидкости.

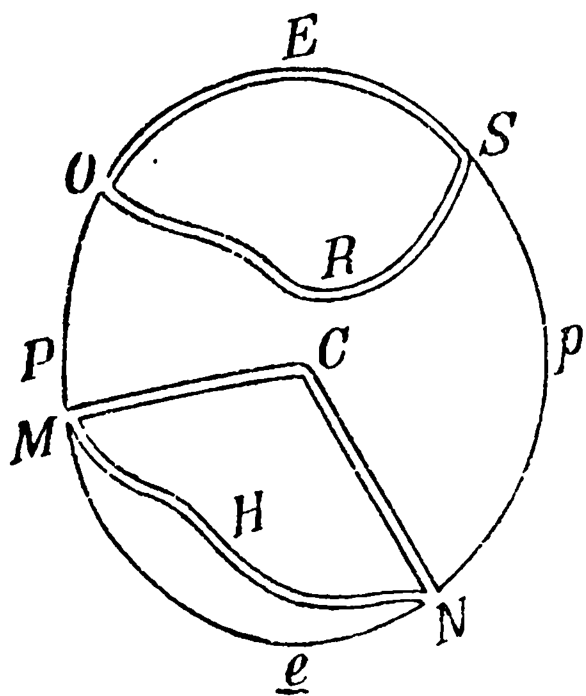
Можно рассматривать равновесие в замкнутом канале еще и как следствие равновесия в канале, соединяющем две произвольные точки поверхности. Действительно, если вообразим два канала *IF* и *LG*, которые начинаются в точках *I* и *L* и доходят до поверхности, то два канала *FIKLG* и *FITLG* будут иметь общие части *FI*, *LG* и будут оба находиться в равновесии. Если отбросить вес общих частей *FI*, *LG*, останутся две части — *IKL* и *ITL*, усилия которых будут одинаковы.

§ 4

После того как мы доказали, что равновесие замкнутого канала вытекает из равновесия любого канала, пересекающего всю массу жидкости, нам остается доказать, что если закон действия силы тяжести таков, что любой замкнутый канал

будет в равновесии, то всегда можно задать такую форму поверхности жидкости, что все каналы, пересекающие целиком всю ее массу, также будут в равновесии.

Для доказательства заметим, что если закон действия силы тяжести задан, то задача определения фигуры планеты, под условием, чтобы был удовлетворен один из обоих обычных принципов, например принцип г-на Гюйгенса, является задачей определенной. Предположим поэтому, что $PEpe$ представляет собой фигуру, определенную на основании этого принципа, и что, сверх этого, установлено, что любой замкнутый канал всегда находится в равновесии; отсюда будет следовать, что канал $OESR$, часть которого OES лежит на поверхности, также будет в равновесии [фиг. 4]. Но часть OES, согласно принципу Гюйгенса, не будет оказывать усилия ни в сторону O, ни в сторону S; следовательно, канал ORS будет в равновесии.



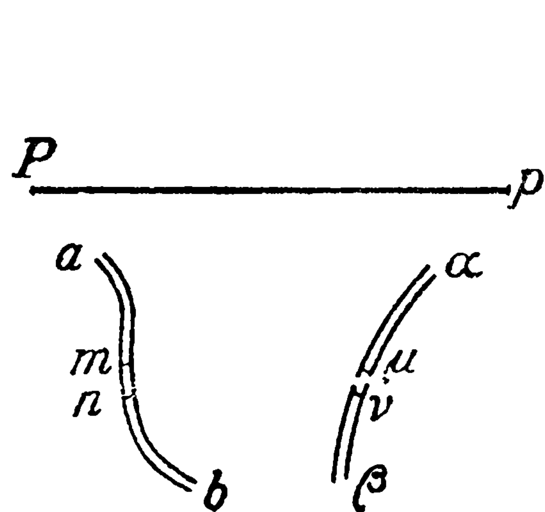
Фиг. 4.

То же самое получится, если определить поверхность, следуя принципу г-на Ньютона, так как из равновесия любых замкнутых каналов вытекает равновесие канала $MCNH$; но MCN будет в равновесии по предположению; следовательно, MHN также будет в равновесии.

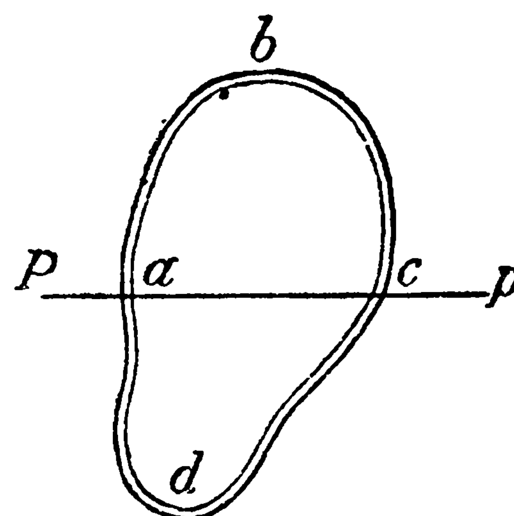
§ 5

Если два канала ab и $\alpha\beta$, наполненные жидкостью, вращаются вокруг оси Pp, причем концы их a, b и α, β находятся на соответственно равных расстояниях от оси Pp, то полное усилие центробежной силы, в ее стремлении вытолкнуть через b жидкость, заключенную в канале ab, равно полному усилию центробежной силы в ее стремлении вытолкнуть через β жидкость, заключенную в канале $\alpha\beta$ [фиг. 5].

Для доказательства предположим, что каждый из каналов ab и $\alpha\beta$ разделен на бесчисленное множество малых цилиндров mn и $\mu\nu$, концы которых также находятся на соответственно равных расстояниях от оси. Благодаря малости mn и $\mu\nu$ можно считать центробежные силы одинаковыми для всех частиц, из которых они состоят. Кроме того, так как вращение всех частей жидкости происходит в одно и то же время,



Фиг. 5.



Фиг. 6.

центробежная сила будет одинакова в m и μ. Но части этих сил, действующие по направлениям mn и $\mu\nu$, будут, согласно теории наклонных плоскостей, находиться в обратном отношении длин mn и $\mu\nu$; массы их относятся друг к другу, как сами длины; отсюда следует, что усилия mn и $\mu\nu$ по направлению к b и β будут одинаковы; следовательно, и полные усилия ab и $\alpha\beta$ будут равны между собой [8].

§ 6

Если имеют в виду исследовать, таков ли данный закон тяготения, что вращающаяся вокруг оси жидкая масса может сохранять постоянную форму, то бесполезно учитывать центробежную силу; иными словами, если жидкая масса может иметь постоянную форму, при отсутствии вращения, то она может обладать постоянной формой и при вращении.

Согласно § 3, необходимо, чтобы любой замкнутый канал *abcd* был в равновесии для того, чтобы жидкая масса могла сохранить постоянную форму. Согласно предыдущему параграфу, сумма усилий центробежной силы на *abcd* [фиг. 6] должна равняться нулю, так как части *ab* и *cd* будут одинаково давить друг на друга в точке *b*, так же как *ad* и *cd* — в точке *d*; следовательно, вращение не нарушит равновесия любого замкнутого канала; поэтому, если этот канал находится в равновесии под действием только тяготения, он будет также в равновесии, если мы заменим тяготение на действительную силу тяжести, составленную из тяготения и центробежной силы [9].

§ 7

Если допустить, что сила тяжести одинакова во всех точках круга, параллельного экватору, и взять два канала HI и KL, наполненные одной и той же жидкостью

Фиг. 7.

и заканчивающиеся на любых двух окружностях AHKFQ и BILGR, параллельных экватору, и оба расположенные на одной и той же поверхности вращения AFGB, сечениями которой являются обе эти окружности, то веса обоих этих каналов будут одинаковы [фиг. 7].

Из условия, что сила тяжести действует одинаково во всех точках круга, параллельного экватору, следует, что тело, помещенное в любую точку *M* на поверхности *ABGF* и вынужденное оставаться на этой поверхности, сможет перемещаться только по направлению меридиана *Mr*; предположим теперь, что *Mm* и *Nn* суть отрезки каналов *HI* и *KL*, полученные в сечении их плоскостями *DE* и *de*, параллельными экватору; при этих условиях силы, действующие на частицы этих маленьких цилиндров, будут направлены по *Mr* и *Ns* и к тому же будут равны.

Далее, так как составляющие сил *Mr* и *Ns* по направлениям цилиндров *Mm* и *Nn* обратно пропорциональны длинам *Mm* и *Nn*, а массы пропорциональны тем же длинам, то веса *Mm* и *Nn* будут равны; следовательно, и полные веса каналов *HI* и *KL* будут также равны между собой.

§ 8

Общий принцип

Для того чтобы жидкий сфероид, подчиненный заданному закону тяготения и вращающийся вокруг оси, мог сохранять постоянную форму, достаточно, чтобы любой замкнутый канал в плоскости меридиана этого сфероида находился всегда в равновесии, если учитывать только одно тяготение без центробежной силы.

Согласно § 6, достаточно показать, что усилия тяготения на все части замкнутого канала взаимно уничтожаются или, что сводится к тому же самому, что вес любого канала *HI* [фиг. 7] будет равен весу любого другого канала, проходящего через те же точки *H* и *I*. Но, согласно предыдущему параграфу, если *ABGF* есть та поверхность вращения, на которой расположен канал *HI*, то вес канала *AB*, который является сечением поверхности плоскостью меридиана, будет такой же, как и вес канала *HI*. Следовательно, достаточно убедиться,

что любой замкнутый канал, расположенный в плоскости меридиана, находится в равновесии, чтобы быть уверенным, что и все части сфероида будут также в равновесии.

Из принципа, который я только что изложил, я мог бы вывести теперь общий метод определения условий, которым должны удовлетворять силы тяготения для того, чтобы жидкость могла быть в равновесии. Но так как наиболее употребительные предположения о законах тяготения могут быть рассмотрены без применения общего метода, то я и начну с исследования этих случаев.

Глава II

О равновесии жидкости, в которой сила тяготения есть результат действия любого числа сил, из которых каждая притягивает к особому центру

§ 9

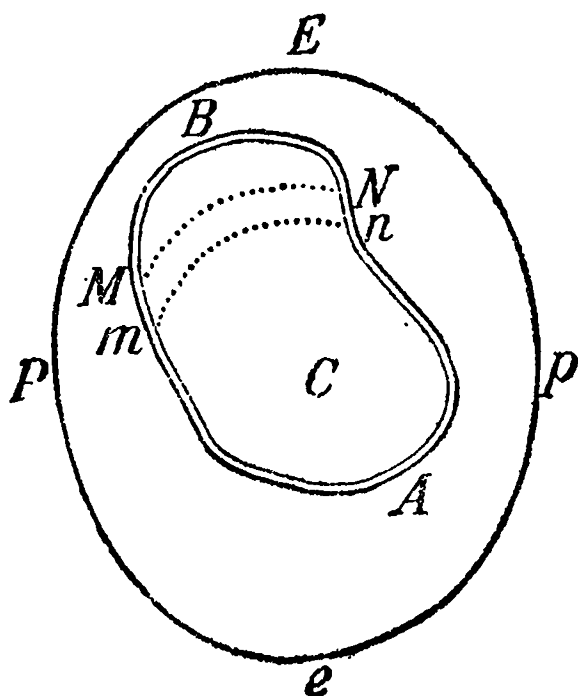
Случай, когда имеется только один центр притяжения

Если все части жидкой массы, вращающейся вокруг оси, подвержены действию одной силы, притягивающей их к центру и зависящей только от расстояния от этого центра, то весьма легко убедиться, что масса жидкости примет форму, при которой она будет в равновесии.

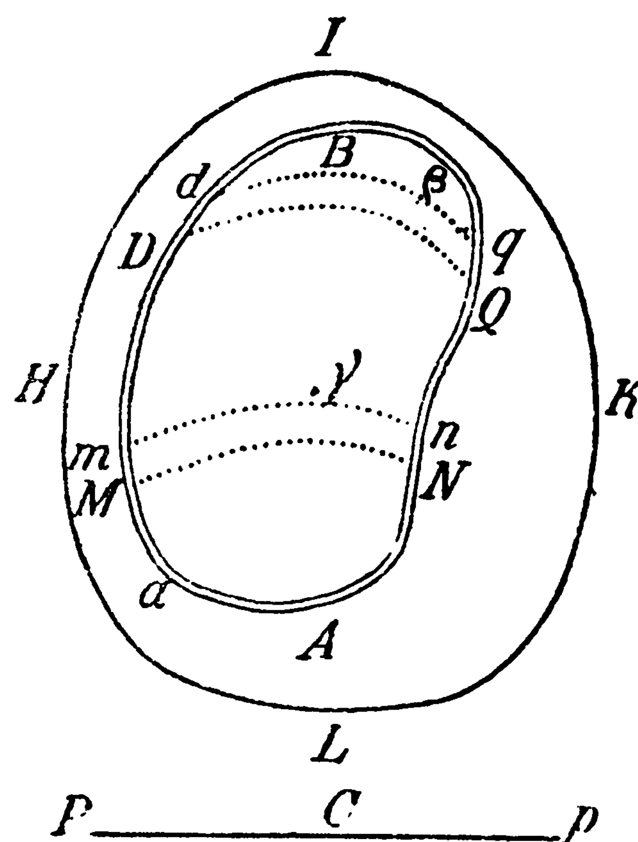
Действительно, согласно § 3, жидкая масса может прийти в равновесное состояние при условии, что любой замкнутый канал находится в равновесии, если при этом учитывается только сила тяготения.

Пусть [фиг. 8] $MBNA$ — произвольный замкнутый канал. Ясно, что если из центра C описать бесчисленное множество дуг [окружностей], таких, как MN и mn, то канал окажется составленным из двух ветвей BMA и BNA, которые будут

содержать одинаковое число цилиндров *Mm* и *Nn*; а так как сила тяготения по предположению одинакова в *M* и *N* и высота цилиндра *Mm* такая же, как высота соответствующего ему цилиндра *Nn*, то отсюда следует, что их веса будут равны. Но в силу этого и обе полные ветви *BMA* и *BNA* будут иметь одинаковый вес; следовательно, канал *MBNA* будет в равновесии. Поэтому достаточно определить поверх-



Фиг. 8.



Фиг. 9.

ность сфероида *PEpe* с помощью одного из обычно применяемых принципов, и можно быть уверенным, что внутренние части этого сфероида останутся в полном покое.

§ 10

Случай, когда имеется несколько центров притяжения

Предположим, например, вместе с г-ном де Мопертюи,* что поток жидкости вращается вокруг оси *Pp* [фиг. 9] и что на каждую частицу этого потока действуют две силы: одна — притяжение к центру *C*, находящемуся вне потока, вторая —

* Сравнить с остроумным объяснением, которое дал г-н де Мопертюи образованию кольца Сатурна („Figure des Astres“, p. 126).

притяжение к центру γ, находящемуся внутри его, считая, что оба эти центра лежат в плоскости меридиана [10].

Мы покажем, что если меридианное сечение *HIKL* той кольцевой фигуры, которую примет поток, будет определено в соответствии с одним из обычных условий равновесия, то и все части этой жидкости будут находиться в равновесии.

Для того чтобы в этом убедиться, нужно вспомнить (§ 8), что общее равновесие планеты было сведено к равновесию любого замкнутого канала, расположенного в меридианной плоскости. Пусть *BDMANQ* — какой-либо канал такого рода; согласно предыдущему параграфу, если разделить канал на множество элементов, таких как *Mm*, *Nn*, окружностями, описанными из центра *C*, то получатся две ветви *BNA* и *BMA*, содержащие одинаковое число элементов и в которых усилия, возникающие только под действием силы, направленной к *C*, будут одинаковы. Если затем разбить тот же канал на множество других элементов *Dd*, *Qq* дугами окружностей *DQ*, *dq*, описанных из центра γ, то мы получим две ветви $\beta D\alpha$, $\beta Q\alpha$, содержащие одинаковое число элементов, которые подвержены силе, действующей в направлении к γ; они тоже уравновесятся; следовательно, канал *BDMANQ* будет в равновесии под действием двух сил, как он был бы и под действием одной. Следовательно, согласно § 8, вся жидкость или кольцевая планета будет в равновесии во всех ее частях.

Если вместо того, чтобы предполагать в каждом меридиане два центра сил, мы вообразим произвольное число их, то легко видеть, что никакого другого доказательства не потребуется, чтобы установить общее равновесие сфероидов или колец, которые могли бы образоваться в этих случаях.

§ 11

Тяготение вызывается притяжением центрального тела любой формы

В предыдущем параграфе, так же как и в объяснении колец, которое дал г-н де Мопертюи, предполагалось, что каждый

центр притяжения действует только в меридианной плоскости, в которой он расположен. Но если бы мы хотели, чтобы тяготение каждой частицы явилось результатом притяжения ее по всем направлениям всеми частями круга, который является, так сказать, центром кольца, то было бы легко доказать равновесие частей кольца. Действительно, представим себе внутри кольца какой-либо замкнутый канал простой или двоякой кривизны; из рассуждений § 9 вытекает, что каждая частица притягивающего круга будет вызывать в этом канале усилия, которые взаимно уравновесятся. Следовательно, действия всего круга на жидкость кольца также уравновесятся; поэтому и вся жидкость будет в равновесии.

Для того чтобы найти фигуру кольца в этом предположении, нужно начать с того, чтобы найти сумму всех притяжений частей круга на частицу, находящуюся вне его; но такая задача приводится к одним квадратурам. Остальное легко получается из принципа г-на Гюйгенса.

Не менее легко убедиться в равновесии сфероида или кольца, если сила тяжести зависит от притяжения его всеми частями твердого ядра, имеющего форму сфероида или кольца.

Наконец, определение сфероида или кольца в этом предположении опять приводится к квадратурам.

§ 12

Сила тяжести есть результат общего притяжения всех частей планеты

Если мы предположим, как это необходимо в системе притяжения, что сила тяжести в каждой точке планеты вызывается не только притяжением ее всеми частями ядра, но также и притяжением самой окружающей жидкости, то определение фигуры сфероида оказывается бесконечно труднее; действительно, при этих условиях закон тяготения зависит от искомой кривой [11]. Но эта задача, хотя и является трудной, тем не менее возможна; как мне кажется, здесь совершенно ясно, что существует такая поверхность, что притяжение

ограничиваемого ею [жидкого] тела, присоединенное к притяжению ядра, вызывает такое тяготение на поверхности, которое в комбинации с центробежной силой дает равнодействующую, перпендикулярную к поверхности [12]. Если считать эту поверхность заданной, тогда, по тем же причинам, по которым мы признали возможность полного равновесия в сфероиде, когда сила тяжести вызывается только притяжением ядра заданной формы, по тем же причинам, — повторяю, — нам станет очевидной возможность и, более того, необходимость равновесия сфероида, в котором жидкость, ограниченная поверхностью, которую мы считаем известной, действует силами притяжения так же, как и ядро.

Легко также убедиться в возможности существования кольца, при том же предположении о притяжении.

Таким же образом мы заключаем, что если бы ядро совершенно отсутствовало, но тяготение вызывалось притяжением жидкой однородной массы, то всегда будет существовать сфероид в состоянии полного равновесия, и что для его определения достаточно воспользоваться принципом г-на Гюйгенса или г-на Ньютона, или, наконец, условием равновесия каналов, форма которых может быть взята совершенно произвольной, если только они заканчиваются в любых двух точках поверхности.

Если мы предположим, что твердое ядро, о котором шла речь, состоит из слоев различной плотности, то и в этом случае все части сфероида, внешняя поверхность которого определяется как обычно, будут в совершенном равновесии.

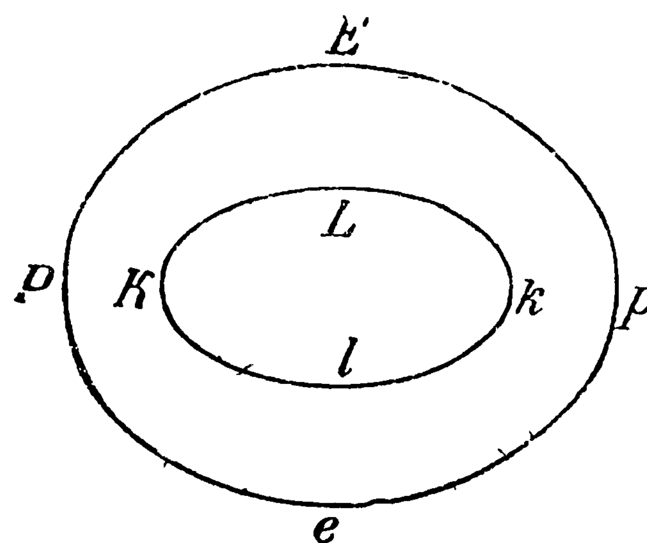
§ 13

Способ объяснения в системе притяжения равновесия планеты, фигура которой задана произвольно

В этой системе, если мы не предполагаем однородности планеты, но вообразим себе, что у нее есть твердое ядро любой плотности и какой угодно формы, то, как легко видеть, можно придать этой планете любую форму, сжатую или вытянутую. Потому что можно, конечно, найти такой сфероид *KLkl*,

что его притяжение, прибавленное к притяжению материи, заключенной между данным сфероидом $PEpe$ и искомым $KLkl$, вызовет, совместно с центробежной силой, равнодействующую силу, направленную перпендикулярно к поверхности $PEpe$ [фиг. 10]; и затем, считая кривую $KLkl$ известной, мы найдем, согласно предыдущему, что все части ограничиваемой ею жидкости будут в равновесии [13].

Этими рассуждениями нельзя было бы удовольствоваться даже и до наших измерений на севере, в Лапландии, для объяснения, каким образом Земля могла бы иметь любую форму, например удлиненную; потому что при определении фигуры Земли необходимо помнить об одном обстоятельстве, не имеющем значения для других планет: предполагаемый закон действия тяготения должен согласоваться и с теми наблюдениями, которыми установлено, что длина секундного маятника должна быть укорочена при переездах от севера к югу. Но так как в предыдущем доказательстве это условие совершенно не было учтено, то необходимо выяснить, какие новые соотношения вносит оно в нашу проблему. К этому мы вернемся позже, в III главе второй части.



Фиг. 10.

Глава III

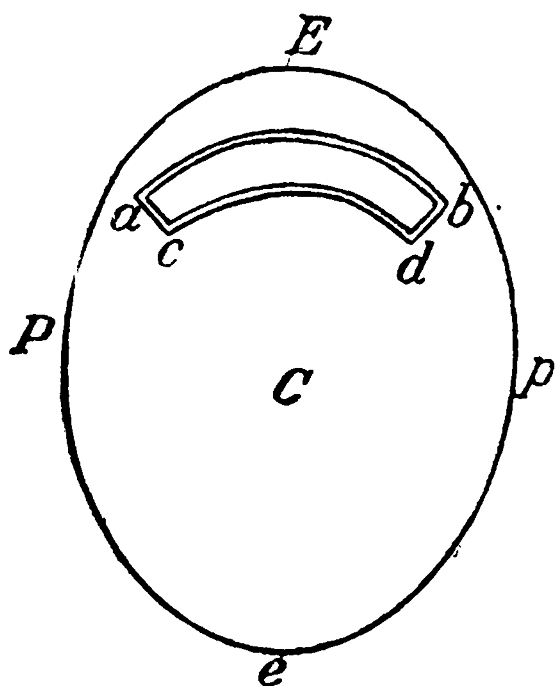
Исследование закона тяготения, при котором планета никогда не будет иметь постоянную форму, хотя из обоих обычно применяемых принципов и получается одна и та же фигура сфероида

§ 14

Рассмотрев столько гипотез, при которых всегда возможно образование планеты, сохраняющей неизменную форму, мы

остановимся теперь на одной, при которой будет иметь место непрерывное движение в частях жидкости. Возвратимся, например, к предположению, что притяжение направлено к одному центру; но допустим теперь, что оно зависит не только от расстояния до этого центра, но еще и от какой-либо другой величины, например от угла, образуемого радиусом с осью, и т. д. Мы увидим, что жидкости никогда не будут в равновесии при таком допущении.

Пусть дан [фиг. 11] сфероид *PEpe* и в нем канал *abcd*, составленный из двух дуг окружностей, центр которых *C* есть центр притяжения, и из двух малых цилиндров *ac*, *bd*, оси которых направлены к центру. Очевидно, что притяжение не окажет никакого действия в круговых ветвях, поскольку оно направлено перпендикулярно к ним. Следовательно, для того чтобы существовало равновесие, необходимо, чтобы усилия в двух малых цилиндрах *ac* и *bd* были одинаковы. Но это условие требует, чтобы тяжесть в *a* была такая же, как в *b*; но это противоречит допущению, так как тяжесть не должна быть одинаковой на одном и том же расстоянии. Следовательно, при всех тех гипотезах, где притяжение направлено к центру, но зависит не только от расстояния до этого центра, жидкость никогда не будет в равновесии [14].



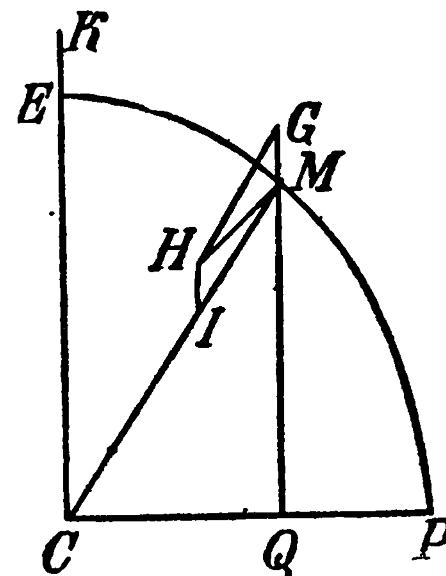
Фиг. 11.

§ 15

Выясним теперь, не дадут ли в этих предположениях оба обычных принципа, т. е. равновесие столбов и перпендикулярность тяжести к поверхности, одну и ту же фигуру

сфероида. Пусть [фиг. 12] *PME* — произвольный сфероид, *C* — его центр, *P* — полюс и *EK* — отрезок, выражающий центробежную силу в точке *E*. Возьмем длину *MG* так, чтобы *MG* относилось к *EK*, как ордината *QM* к радиусу экватора *CE*; тогда *MG* будет выражать центробежную силу в точке *M*, потому что все части вращаются в одно и то же время.

Установив это, проведем радиус *MC* и перпендикуляр *MH* к кривой *EMP* в точке *M*, затем *GH* параллельно *MC* и из точки *H*, где эта прямая пересекает *MH*, проведем *HI* параллельно *MG*; тогда несомненно *MI* будет выражать центральную силу, которая должна быть приложена к точке *M* для того, чтобы принцип г-на Гюйгенса был соблюден для сфероида *PME*.



Фиг. 12.

Если бы мы хотели теперь, чтобы тяготение к центру зависело только от расстояния, то отношение между ними было бы уже известным, так как оно было бы равно отношению *MI* к *MC*. Но если мы потребуем, чтобы тяготение зависело не только от расстояния, но еще от угла *MCP* или какой-либо другой величины, то ясно, что можно изменять на бесконечное число способов закон притяжения от центра *C* на точку *M* и сохранять при этом тот же вес в колонне *CM*. Между тем, мы видели в предыдущем параграфе, что никогда не будет равновесия частей жидкости, если притяжение к центру зависит от других величин, а не только от расстояния до этого центра. Таким образом, получено бесконечное множество случаев, когда согласие обоих обычных принципов ничего не обеспечивает.

Отсюда следует, что необходим принцип равновесия столь общий, как тот, который мы дали в предыдущей лаве [15].

Глава IV

Общий способ применения принципа равновесия каналов любой формы

§ 16

Задан закон, по которому тяготение действует на все части жидкой массы, вращающейся вокруг ее оси; требуется выяснить, может ли эта масса принять форму, которую она сохранит постоянно

Из § 8 известно, что для того, чтобы жидкая масса могла принять постоянную форму, необходимо, чтобы любой замкнутый канал, расположенный в плоскости меридиана, был в равновесии, независимо от центробежной силы, или, что то же самое, необходимо, чтобы при вычислении суммы усилий тяготения в каком-нибудь канале ON мы получили ту же величину, как и для всякого другого канала, проходящего через те же точки O и N.

Для применения этого принципа возьмем в канале ON [фиг. 13] две произвольные, бесконечно близкие точки S и s, опустим из них перпендикуляры SH и sh на ось CP; проведем Sr параллельно оси и представим себе, что сила тяготения в каждой точке S разложена на две силы, из которых одна действует перпендикулярно к оси CP, а другая ей параллельна.

Положим далее:

$$CH = x \qquad HS = y$$
$$Sr = dx \qquad sr = dy$$

обозначим также:

силу, перпендикулярную к CP, через P
силу, параллельную CP, через Q.

После этого определим усилие, производимое силой P на цилиндр Ss, чтобы вытолкнуть его через O; мы легко найдем,

что оно будет Pdy, так как сила P направлена по SH, и часть ее, действующая вдоль канала Ss, будет $P \cdot rs/Ss$; умножив эту величину на массу, получим $P \cdot rs$ или Pdy.

Найдем далее усилие, производимое силой Q на цилиндр Ss по направлению к тому же концу O; таким же способом получим, что оно равно Qdx. Следовательно, $Pdy + Qdx$ будет выражать общее усилие на малый цилиндр Ss под влиянием обеих сил, или, что то же самое, усилие на него силы тяготения, которая была разложена на эти две силы [16].

Если бы мы имели теперь в виду применить это выражение для того, чтобы найти вес канала ON в конечном виде, предполагая, что искривление, т. е. форма канала, задано в виде уравнения между x и y, мы бы начали с того, что из $Pdy + Qdx$ исключили бы y и dy. Тогда этот дифференциал содержал бы только x и dx, и мы бы его интегрировали, не забывая дополнить интеграл, т. е. прибавить постоянную, необходимую для того, чтобы его вес равнялся нулю при x, равном CG. Затем, полагая $x = CI$, мы получили бы общий вес ON. Но так как равновесие жидкости требует, чтобы вес ON не зависел от вида кривой OSN, т. е. от частных значений y при данном x, необходимо, чтобы $Pdy + Qdx$ можно было проинтегрировать, независимо от значения y, иными словами: необходимо, чтобы $Pdy + Qdx$ было полным дифференциалом,* для того чтобы жидкость могла находиться в равновесии.

Фиг. 13.

* Под полным дифференциалом я понимаю величину, интеграл которой есть функция от x и y. Так,

$$y\,dx + x\,dy, \qquad \frac{y\,dx + x\,dy}{2\sqrt{a^2 + xy}}$$

§ 17

Если выражения сил P и Q будут слишком сложны для того, чтобы можно было легко определить, будет ли $P\,dy + Q\,dx$ полным дифференциалом, необходимо применить теорему, установленную в моем мемуаре по интегральному исчислению,* т. е. надо будет выяснить, выполняется ли условие**

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$$

Всякий раз, как это уравнение будет удовлетворено, можно быть уверенным, что жидкость будет в равновесии.

§ 18

Считая заданным то же самое, что и в предыдущей задаче, найти уравнение меридиана жидкой массы

Предположим, что $CH = x$ и $SH = y$ становятся координатами CQ и QM меридиана EMP сфероида. Тогда очевидно, что интеграл от $P\,dy + Q\,dx$, дополненный так, чтобы он был равен нулю при x и y, равных нулю, будет выражать вес столба или любого канала CM, который идет от центра C к поверхности. Поэтому необходимо, чтобы этот интеграл без суммы усилий центробежной силы на все части столба

суть полные дифференциалы, потому что их интегралы xy и $\sqrt{a^2 + xy}$; точно так же

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

есть полный дифференциал, потому что его интеграл представляет дугу, тангенс которой равен y/x при радиусе, равном 1. Но $y^3\,dx + x^3\,dy$, $y^2\,dx + x^2\,dy$ не являются полными дифференциалами, потому что никакие функции от x и y не могли бы быть их интегралами.

* Мемуары Парижской Академии, 1740, стр. 294.

** Под $\frac{dP}{dx}$ мы понимаем дифференциал функции P, вычисленный в предположении, что только x переменное, и от которого отброшены dx.

CM был величиной постоянной. Но, согласно § 5, сумма усилий центробежной силы на *CM* та же, что и на столб *QM*. Поэтому, обозначая через f центробежную силу на расстоянии от оси, равном r, мы будем иметь $\frac{fy^2}{2r}$ для суммы усилий центробежных сил на столб *CM*; следовательно, *общее уравнение меридиана сфероида будет* [17]:

$$\int (P\,dy + Q\,dx) - \frac{fy^2}{2r} = A$$

Глава V

Общий принцип, столь же необходимый в приложении к жидкостям, как и начало равновесия любых каналов, и применение этого нового принципа для получения тех же результатов, что и при помощи первого принципа

§ 19

Уровенной кривой я буду называть *кривую*, во всех точках которой касательная перпендикулярна к направлению силы тяжести; то же определение применяю для *уровенной поверхности* [18].

§ 20

Под *уровенным слоем* я буду понимать пространство, заключенное между двумя уровенными поверхностями.

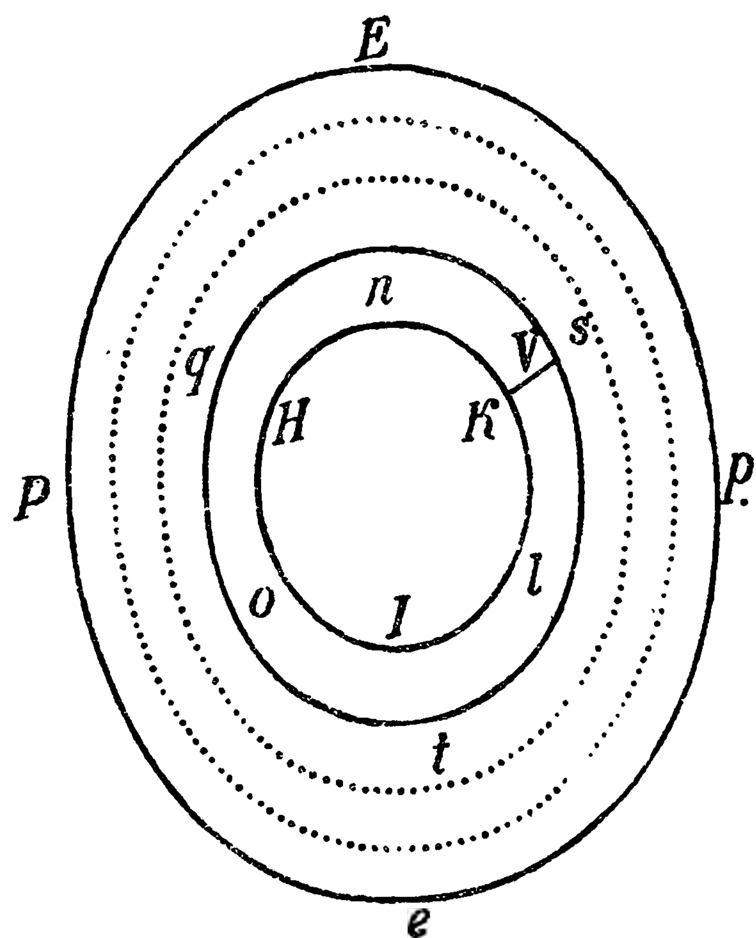
§ 21

Общий принцип

Жидкая масса EPep, которую мы представляем себе разделенной на бесконечное множество уровенных слоев,

будет в равновесии, если в каждой точке K любого из этих слоев толщина слоя KV обратно пропорциональна тяжести в той же точке K [фиг. 14].

Предположим сначала, что имеется только одна масса жидкости *HKI* и что она сама по себе находится в равновесии. Из основных принципов гидростатики очевидно, что если давить на все точки ее поверхности с одинаковой силой, то равновесие не нарушится. Поэтому, если наложить на массу *HKI* бесконечно тонкий слой *onl*, образованный из бесконечного числа маленьких цилиндров, у которых высоты обратно пропорциональны силам тяжести, то давление, производимое этими цилиндрами, будет одинаково, и, по предположению, поверхность слоя *onl* будет уровенной. Следовательно, масса *onl* будет в равновесии так же, как масса *HKI*. Налагая затем непрерывно другие слои *qst* и т. д., в которых соблюдены те же условия относительно толщины в каждой точке, увидим, что равновесие всей массы *EPep* будет зависеть только от равновесия первой массы *HKI*. Но так как масса *HKI* была взята произвольно, можно ее предположить и столь малой, что это будет лишь бесконечно малая частица, которая не может не быть в равновесии; следовательно, и т. д. [19].



Фиг. 14.

§ 22

Предполагая, что на каждую точку M уровенной кривой PEp действуют две силы, из которых одна, MY, перпенди-

кулярна к оси Pp, а другая, MZ, параллельна той же прямой, требуется найти зависимость, которая должна иметь место между этими силами для того, чтобы равнодействующая MX была обратно пропорциональна толщине $M\mu$ бесконечно тонкого уровенного слоя $\pi\varepsilon\Pi PEp$ [фиг. 15].

Фиг. 15.

Опустив из точки μ перпендикуляр μq на ось Pp и проведя через точку m прямую mR, параллельную той же оси, назовем:

$$\text{силу } MY \ldots\ldots R, \qquad \text{силу } MZ \ldots\ldots Q$$

$$CQ \ldots\ldots x, \qquad QM \ldots\ldots y$$

тогда

$$Qq = Rm = \quad dx$$

$$MR = -dy$$

и так как по условию задачи сила MX должна быть перпендикулярна к Mm, то треугольники MXY и MRm подобны, так что $Q:R = -dy:dx$.

Отсюда получим общее уравнение

$$R\,dy + Q\,dx = 0$$

в этой форме оно будет принадлежать одинаково всем уровенным кривым; но после интеграции оно будет выражать,

по желанию, любую из них, в зависимости от прибавленной постоянной.

Допустим теперь, что мы проинтегрировали бы уравнение $R\,dy + Q\,dx = 0$ и получили бы путем прибавления постоянной a уравнение кривой PEp в конечной форме; затем, заменив постоянную a на постоянную $a + da$, мы образовали бы уравнение кривой $\Pi\varepsilon\pi$; очевидно, что из этих двух уравнений можно найти значение толщины слоя $M\mu$ в точке M. Но, когда эта величина найдена, нам осталось бы только умножить ее на силу MX и сделать произведение пропорциональным da, потому что это произведение есть вес $M\mu$, а этот вес должен быть постоянным по условиям задачи.

Но мы увидим, что и без действительного интегрирования уравнения

$$R\,dy + Q\,dx = 0$$

а из одного разбора операций, которые нужно было бы выполнить для интегрирования, можно найти зависимость между R и Q, которая вытекает из условия пропорциональности между весом $M\mu$ и da.

Предположим для этого, что ω есть та самая величина, на которую нужно умножить все члены выражения $R\,dy + Q\,dx$, чтобы превратить его в полный дифференциал.

Тогда ясно, что интеграл от выражения $\omega\,(R\,dy + Q\,dx)$, приравненный постоянной a, будет уравнением кривой PEp, предполагая, что a будет значением постоянной или параметром для кривой PEp. Тот же интеграл, приравненный постоянной $a + da$, даст уравнение кривой $\Pi\varepsilon\pi$. Но для того чтобы получить из этих двух уравнений $M\mu$, или хотя бы $M\rho$, очевидно необходимо, чтобы в первом из этих уравнений x и y представляли значения CQ и QM, а во втором они выражали бы Cq и $q\mu$.

Предположим, что образована разность этих двух уравнений, связывающих CQ с QM и Cq с $q\mu$. Очевидно, что мы получим уравнение

$$\omega R\,dy + \omega Q\,dx = da$$

предполагая, что dy означает уже не MR, как в предыдущих вычислениях, но $\mu\rho$, т. е. разность между MQ и μq.

Если мы вспомним далее, что μM, т. е. ось цилиндра, изображающая толщину слоя в точке M, должна быть перпендикулярна к Mm и, следовательно, являться продолжением MX, то подобные треугольники $M\mu\rho$ и MXY дадут:

$$\mu\rho = \frac{R\,dx}{Q}$$

Подставляя это значение в предыдущее уравнение, получим

$$\frac{R^2}{Q}\,dx + \omega Q\,dx = da$$

откуда

$$dx = \frac{da}{\omega}\,\frac{Q}{R^2 + Q^2}$$

и, следовательно:

$$M\mu = \frac{da}{\omega\sqrt{R^2 + Q^2}},$$

потому что подобные треугольники $M\mu\rho$ и MXY дают:

$$XY : XM = M\rho : M\mu$$

Если умножить теперь это значение $M\mu$ на силу MX, чтобы получить вес $M\mu$, то этот вес получится равным da/ω. Но мы только что видели, что этот вес должен быть пропорционален da; следовательно, ω — величина постоянная. Поэтому выражение $R\,dy + Q\,dx$ не требуется умножать на интегрирующий множитель для того, чтобы $R\,dy + Q\,dx$ было полным дифференциалом; таким образом, *выражение* $R\,dy + Q\,dx$ *должно быть полным дифференциалом некоторой функции от* x *и* y *для того, чтобы давление слоя было во всех точках одинаково и, следовательно, чтобы сфероид был в равновесии* [20].

§ 23

Из сказанного очевидно, что *в тех случаях, когда выражение* $R\,dy + Q\,dx$ *есть полный дифференциал, то его интеграл, приравненный постоянной, будет уравнением сфероида*, потому что поверхность сфероида должна сама быть уровенной поверхностью.

§ 24

Если мы пожелаем сравнить это общее уравнение с полученным в предыдущей главе, то нужно заметить, что R стоит здесь вместо $P - \frac{fy}{r}$, так как P в § 16 выражает часть тяготения или первичного притяжения, действующего перпендикулярно к оси, и потому из нее надо вычесть $\frac{fy}{r}$, т. е. центробежную силу, чтобы получить R.

Что касается Q, т. е. силы, действующей параллельно оси, то легко видеть, что выражение ее останется одинаковым, будем ли мы разлагать на составляющие основное тяготение или действительную силу тяжести.

§ 25

О необходимой связи между принципами, изложенными в §§ 8 и 21

Нетрудно убедиться, и притом независимо от выполненных вычислений, в том, что принцип, примененный в предыдущих главах, т. е. равновесие любых каналов, никогда не привел бы к иным результатам, чем принцип равного давления слоев, которым мы только что воспользовались. Действительно, достаточно принять за замкнутый канал совокупность двух криволинейных ветвей, составляющих части двух соседних уровенных кривых, и двух прямолинейных ветвей, перпендикулярных к обеим уровенным, и мы убедимся в том,

что жидкость в двух криволинейных ветвях не имеет никакого веса [21], так как эти ветви уровенные; поэтому эти две прямолинейные ветви должны иметь равные веса, для того чтобы весь канал был в равновесии; отсюда следует, что толщина слоя должна быть обратно пропорциональна силе тяжести.

Глава VI

Применение формулы, полученной на основании двух предыдущих принципов, к некоторым частным случаям

§ 26

Силы, действующие по направлению к обеим осям, зависят только от расстояний от этих осей

Легко видеть, что во всех подобных случаях масса жидкости сможет сохранять постоянную форму. Если силу, которая действует перпендикулярно к оси x, назовем Y, а силу, которая направлена перпендикулярно к оси y, назовем X, то

$$\int X dx + \int Y dy - \frac{fy^2}{2r} = A$$

будет уравнением меридиана при этом допущении.

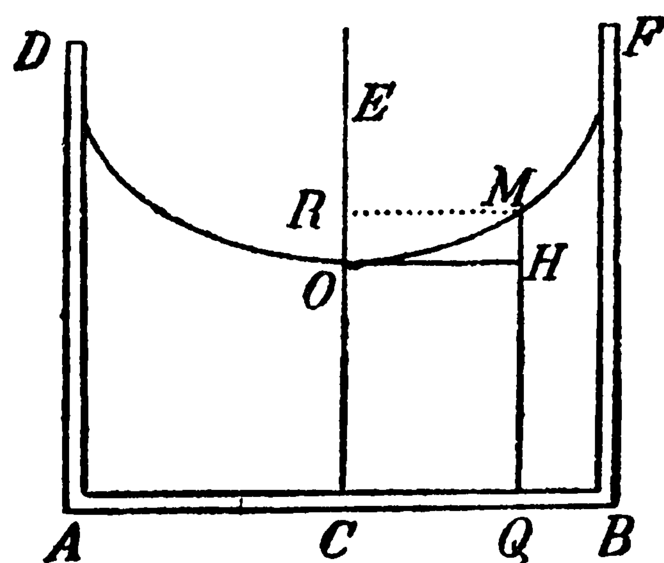
§ 27

Хотя следующая задача и не имеет прямого отношения к вопросам, которые я исследую в этой работе, но ее решение так легко вытекает из предыдущего, что я считал, что мне простят здесь некоторое небольшое отступление.

Найти кривизну OM поверхности воды, заключенной в цилиндрическом сосуде, который вращают вокруг оси CE [фиг. 16].

Заметим сначала, что каждая частица воды подвержена действию двух сил: одна из них постоянная и вертикальная, — это тяжесть, вторая переменная и горизонтальная, — это центробежная сила, зависящая от скорости частиц жидкости, соответственно тем окружностям, которые они описывают.

Отсюда я заключаю, что поскольку скорость частиц, по предположению, остается неизменной, то и вся масса жидкости будет в равновесии и сохранит постоянную форму. Для того чтобы найти уравнение кривой OM, вращением которой образуется поверхность воды, предположим для большей общности, что скорость частиц, находящихся на расстоянии x от оси, выражается некоторой функцией X от x; центробежная сила, следовательно, будет X^2/x, и эта величина со знаком минус будет представлять силу, которую мы в предыдущем называли Q. Я беру знак минус потому, что мы предположили выше, что Q направлена к оси CE.



Фиг. 16.

Что касается той силы P, которая двигала в направлении к BA, то теперь это просто сила тяжести; мы обозначим ее через постоянную p и получим уравнение:

$$-\frac{X^2 dx}{x} + p\,dy = 0$$

ил

$$dy = \frac{X^2\,dx}{px}$$

это и будет уравнение искомой кривой OM.

Если дать себе труд сравнить это решение с решением знаменитого г-на Даниила Бернулли,* то станет очевидным, что они совпадают. Что же касается решения г-на Германна,**

* Стр. 244 и 245 „Гидродинамики“.

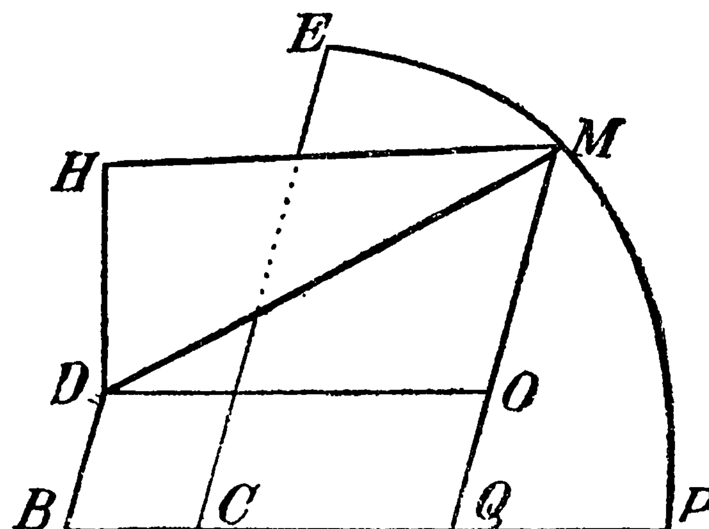
** Стр. 372 его „Форономии“.

то это не имеет места [22]; но, по моему мнению, можно легко доказать, что он ошибся, так как он приравнивает вес столбика воды MH, т. е. избытка столба MQ над уровнем, центробежной силе в точке H, тогда как этот вес следует приравнять сумме центробежных сил, действующих по HO.

§ 28

Общее уравнение сфероидов в случае, когда тяготение составляется из притяжения центров, взятых в любом числе

Пусть [фиг. 17] CP — ось вращения; EMP — один из меридианов; M — какая-нибудь точка на этом меридиане; H — один из притягивающих центров, который, для большей общности, мы предполагаем лежащим вне плоскости меридиана; HD — перпендикуляр, опущенный из этого центра на плоскость меридиана $DBCPME$; DB — перпендикуляр, опущенный из D на ось BCP; CQ и QM — координаты кривой EMP, соответствующие точке M.



Фиг. 17.

Положим, сверх того:

$$CQ = x \quad QM = y$$

Притяжение M к H равно $\alpha (HM)^n$; центробежная сила на расстоянии, равном r, есть f; пусть

$$CB = a, \quad DB = b, \quad DH = c$$

Тогда для той части силы притяжения от центра H, которая действует по направлению MQ, найдем:

$$\alpha \frac{MO}{MH} (MH)^n$$

или, что то же самое, часть силы P, происходящей от центра H, будет

$$\alpha(y-b)\left[(x+a)^2+(y-b)^2+c^2\right]^{\frac{n-1}{2}}$$

Точно так же часть силы H, действующая параллельно CP, будет

$$\alpha\frac{DO}{MH}(MH)^n,$$

иными словами, эта часть силы Q равна:

$$\alpha(x+a)\left[(x+a)^2+(y-b)^2+c^2\right]^{\frac{n-1}{2}}$$

Отсюда следует, что часть величины $\int(P\,dy+Q\,dx)$, соответствующая центру H, будет иметь значение:

$$\frac{\alpha}{n+1}\left[(x+a)^2+(y-b)^2+c^2\right]^{\frac{n+1}{2}}$$

или

$$\frac{\alpha}{n+1}(HM)^{n+1}$$

Следовательно, если вообразим любое число центров H', H'' и т. д. и если степени расстояний до этих центров, выражающие законы действия сил, будут n, n', n'' и т. д., а интенсивности этих сил α, α', α'' и т. д., то

$$\frac{\alpha}{n+1}(HM)^{n+1}+\frac{\alpha'}{n'+1}(H'M)^{n'+1}+\frac{\alpha''}{n''+1}(H''M)^{n''+1}+\text{и т. д.}$$

$$-\frac{fy^2}{2r}=A$$

будет общее уравнение сфероида.

Если же мы предположим, что притяжение выражается не степенью расстояния, а произв льной функцией расстоя-

ния, то ясно, что задача легко решается и в этом случае [23].

§ 29

Если дается только один центр сил и если предполагается, что он находится в начале оси x, то в таком случае:

$$\frac{\alpha}{n+1}(x^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}-\frac{fy^2}{2r}=A$$

было бы уравнением сфероида; это уравнение совпадает с тем, которое вывел г-н де Мопертюи в его „Рассуждении о фигуре небесных тел“ (стр. 152, издание второе).

§ 30

Если мы предположим два центра — один в начале оси x, другой на оси y, то придем к уравнению

$$\frac{\alpha}{n+1}(x^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}+\frac{\alpha'}{n+1}[x^2+(y-b)^2]^{\frac{n'+1}{2}}-\frac{fy^2}{2r}=A;$$

оно совпадает с общим уравнением колец, выведенным г-ном де Мопертюи на стр. 170 „Фигуры небесных тел“.

§ 31

Способ получения уравнения сфероида, когда тяжесть есть результат притяжения центральным ядром заданной формы и равномерной плотности

В этом предположении нужно найти, при помощи квадратур, сумму всех величин — таких, как

$$\frac{\alpha}{n+1}(HM)^{n+1},$$

или, что то же самое, сумму произведений масс всех частиц данного ядра на их расстояния от точки M, в степени $n+1$. Обозначая эту величину через Z, получим уравнение сфероида

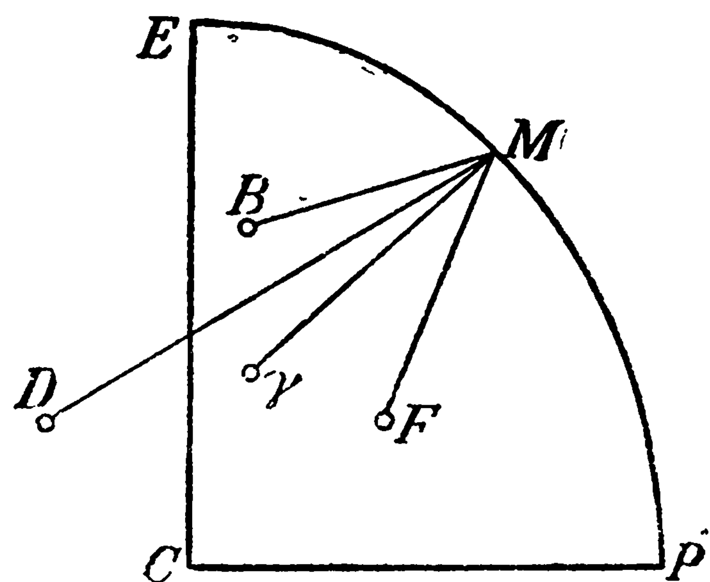
$$Z-\frac{fy^2}{2r}=A$$

Таким же способом найдем уравнение сфероида, если его ядро состоит из слоев различной плотности.

§ 32

Если частицы жидкой планеты, вращающейся вокруг оси, взаимно притягиваются с силой, прямо пропорциональной первой степени расстояния, то фигура этой планеты есть эллиптический сфероид.

Можно было бы без очень длинных вычислений получить доказательство этой теоремы на основании § 28, но для большей простоты мы это сделаем следующим образом.



Фиг. 18.

Заметим, прежде всего, что если несколько произвольных тел B, D, F и т. д. притягивают частицу M [фиг. 18] с силой, прямо пропорциональной их массам и их расстояниям от точки M, то можно вместо всех этих тел подставить одну массу, равную сумме $B+D+F$ и т. д., помещенную в центре тяжести γ всех этих тел и действующую пропорционально ее расстоянию до точки M.

После этого, очевидно, что можно представить себе все частицы сфероида, вызывающие своим притяжением силу тяготения, сосредоточенными в центре планеты C, и тогда задача представит собой частный случай § 29. Надо поло-

жить $n=1$ в общем уравнении этого параграфа; мы получим тогда уравнение

$$\frac{\alpha}{2}(x^2+y^2)-\frac{fy^2}{2r}=A$$

из которого видно, что меридиан сфероида представляет собой эллипс.

Глава VII

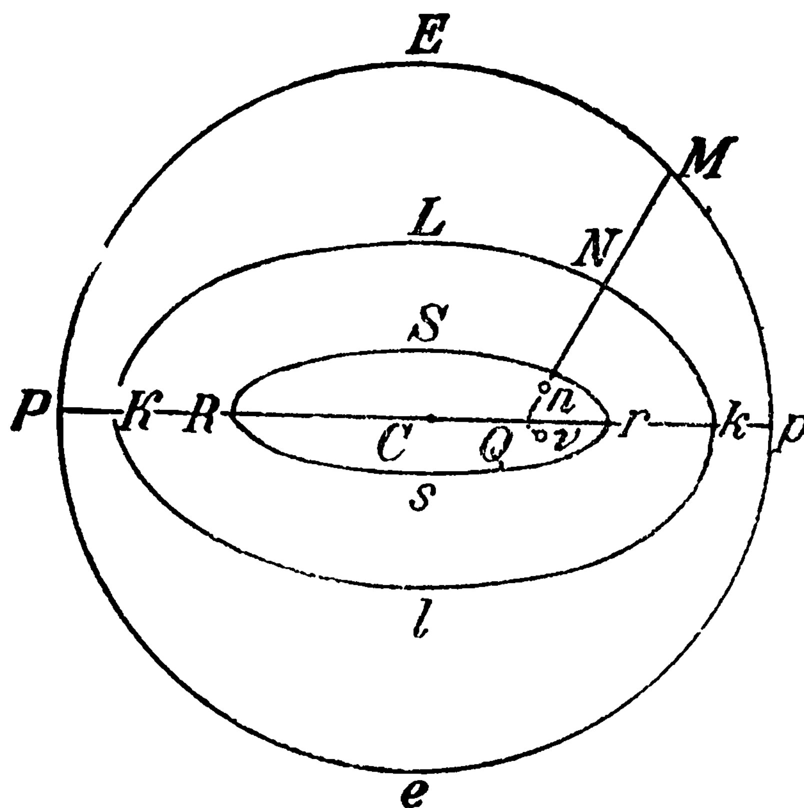
Применение принципа равновесия любых каналов к исследованию законов тяготения, при которых эта сила направлена по перпендикуляру к заданной кривой

§ 33

Эти предположения совпадают с теми, которые принял г-н Бугэ в мемуаре, представленном им Академии в 1734 г. под названием: „Сравнение двух законов, которым Земля и планеты должны подчиняться в отношении фигуры, образуемой ими под действием тяжести". Оставляя в стороне центробежную силу, г-н Бугэ предполагает, что все тяжелые тела устремляются перпендикулярно к заданной кривой *KLkl* [фиг. 19], и он ищет закон действия силы тяжести по этим направлениям, так, чтобы принципы г-на Гюйгенса и г-на Ньютона приводили к одному и тому же уравнению; а этого, по его мнению, достаточно, чтобы сфероид был в равновесии. Так как при помощи моей теории очень легко определить все случаи, когда, при заданных здесь условиях, жидкость может находиться в равновесии, то я рассмотрю этот вопрос подробнее.

Прежде всего, я обращу внимание на то, что эти условия можно приблизить к природе, допустив внутри сфероида твердое ядро. Это будет [фиг. 19] овал *RSrs*, наименьший из всех овалов, имеющих ту же самую эволюту, как и овал *KLkl*. Действительно, если бы мы предположили, что жидкость

имеется и внутри этого овала, необходимо, чтобы ее частицы притягивались по направлениям перпендикуляров MQ к кривой $KLkl$. Пусть n и ν — две частицы жидкости, бесконечно близкие к оси. Эти частицы будут притягиваться по направлениям, образующим между собой конечный угол; а это противоречит здравому смыслу [ce qui est choquant].



Фиг. 19.

Однако, независимо от того, имеется ли жидкость внутри овала $RSrs$ или нет, метод вычисления для определения возможности равновесия будет всегда один и тот же [24].

§ 34

Выяснить, может ли жидкость быть в равновесии, если сила тяготения постоянна

Пусть KLk [фиг. 20] изображает директрису тяготения, т. е. кривую, к которой все тела притягиваются по перпендикулярам; пусть M — произвольно взятая частица жидкости и MV — перпендикуляр к директриссе. Положим далее:

$$CQ=x;\quad QM=y;\quad CV=z$$

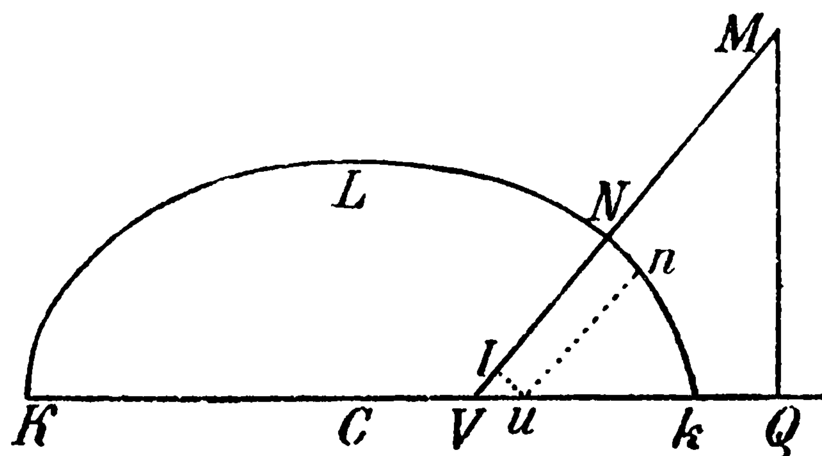
Тяготение обозначим через p.

Сила, направленная к CQ и названная выше P, будет

$$\frac{py}{\sqrt{(x-z)^2+y^2}}$$

Сила, перпендикулярная к CQ, названная Q, будет

$$\frac{p(x-z)}{\sqrt{(x-z)^2+y^2}}.$$



Фиг. 20.

Таким образом, необходимо, чтобы выражение

$$\frac{py\,dy+p(x-z)\,dx}{\sqrt{(x-z)^2+y^2}}$$

было полным дифференциалом какой-либо функции, для того чтобы было возможно равновесие сфероида. На первый взгляд кажется, что это может иметь место только в случае, если z постоянно, т. е. если тяготение направлено к одной точке. Но при внимательном рассмотрении можно легко найти интеграл этого дифференциала, пользуясь тем, что кривая KLk задана. Действительно, заменив этот дифференциал следующим равным ему выражечием:

$$p\,d\sqrt{(x-z)^2+y^2}+\frac{p(x-z)\,dz}{\sqrt{(x-z)^2+y^2}},$$

замечаем, что величина

$$\frac{x-z}{\sqrt{(x-z)^2+y^2}},$$

стоящая во втором члене, есть синус угла QMV; но этот же синус может быть выражен, как $\frac{IV}{Vu}$, причем ul — перпендикуляр, опущенный из u на MV. Но Vu есть не что иное, как dz; поэтому выражение

$$\frac{(x-z)\,dz}{\sqrt{(x-z)^2+y^2}}$$

есть IV, а интеграл от этого выражения равен $-NV$, сложенному с постоянной, потому что NV уменьшается при возрастании CQ. Поэтому интеграл полного дифференциала

$$\frac{py\,dy+p\,(x-z)\,dx}{\sqrt{(x-z)^2+y^2}}$$

равен

$$p\cdot(MN)+pA$$

Следовательно, сфероид может находиться в равновесии при заданном условии.

§ 35

Если тяжесть непостоянна, определить, как она должна изменяться, чтобы могло иметь место равновесие

Выражение

$$\frac{(x-z)\,dx+y\,dy}{\sqrt{(x-z)^2+y^2}}$$

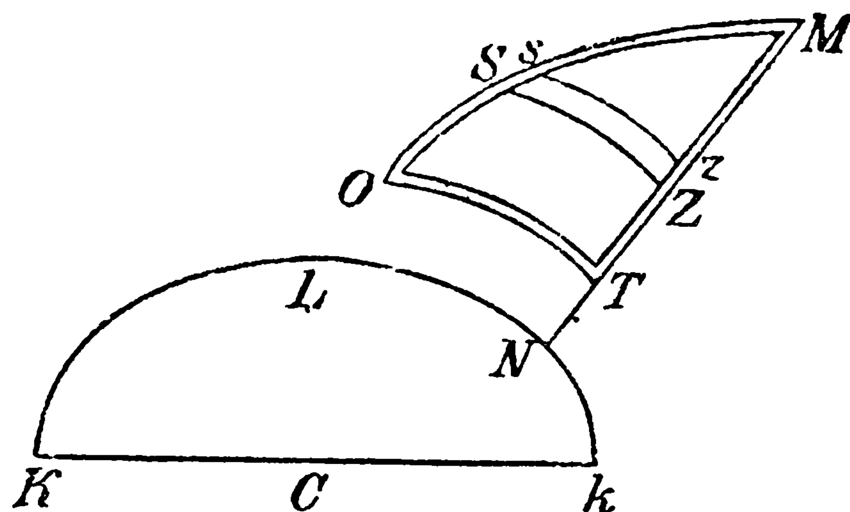
будет всегда дифференциалом функции, выражающей длину NM.

Если обозначить эту прямую NM через u и сохранить p для обозначения силы тяжести, то для существования равновесия необходимо, чтобы pdu было полным дифференциалом; но для этого, очевидно, требуется, чтобы p было функцией одного u; таким образом, *тяжесть должна зависеть только от расстояния до директрисы, чтобы сфероид был в равновесии.*

§ 36

Второе решение обеих предыдущих задач

Согласно установленному в § 16, необходимо, чтобы тяжесть произвольного канала *OM* зависела исключительно от положения точек *O* и *M*, но совершенно не зависела от искривления этого канала. Пусть *MN* [фиг. 21] будет перпендикуляр к директрисе *KLk* и *OT* — кривая, имеющая общую эволюту с *KLk*; здесь требуется доказать, что вес канала *OM* будет равен весу канала *OTM*. Но вес *OT* должен равняться нулю



Фиг. 21.

так как, по предположению, тяжесть действует перпендикулярно к направлению канала во всех его точках [25]. Поэтому *OM* и *MT* должны быть в равновесии, или, что то же самое, если провести две какие-либо бесконечно близкие кривые *SZ* и *sz*, имеющие каждая общую эволюту с *OT*, вес *Ss* должен быть равен весу *Zz*. о эти два малых цилиндра могут быть в равновесии только, если вес в точке *S* равен весу в точке *Z*, т. е. если эти силы равны на равном расстоянии от директрисы. Следовательно, равновесие сфероида требует, чтобы тяжесть была функцией одного только расстояния от этой кривой.

§ 37

Из доказанного следует, что если бы тяжесть была результатом действия нескольких сил, действующих перпендикулярно

к заданным кривым и являющихся функциями расстояния точки до этих кривых, то равновесие было бы возможно и в этом случае.

§ 38

Найти уравнение сфероида в случае, когда сила тяготения направлена перпендикулярно к заданной кривой и является произвольной функцией расстояния до этой кривой

Возьмем столб жидкости MN [фиг. 22] в направлении, перпендикулярном к заданной кривой, и соединим его с каналом KP, проходящим через полюс, при помощи канала NK, идущего вдоль заданной кривой LNK.

Очевидно, что тяготение не вызовет никакого действия в KN, а центробежная сила — в KP. Следовательно, необходимо, чтобы вес MN, уменьшенный на центробежную силу в канале $MN+NK$ или, что то же самое, уменьшенный на центробежную силу в QM, был постоянным.

Проведем теперь NG перпендикулярно оси и положим:

$$GN=z; \quad VN=s; \quad NM=t$$

Пусть сила тяготения в M равна T, центробежная сила на расстоянии r равна f; но здесь

$$QM=(t+s)\frac{z}{s}$$

и центробежная сила по QM равна $\frac{f}{2r}(t+s)^2\frac{z^2}{s^2}$. Вес столба MN равен $\int T\,dt$.

Следовательно, уравнение сфероида будет

$$\int T\,dt-\frac{f}{2r}(t+s)^2\frac{z^2}{s^2}=A$$

по этому уравнению легко построить меридиан, так как s дано как функция z уравнением директрисы.

§ 39

Если сила тяжести постоянна и [интенсивность ее] равна единице, то в этом случае

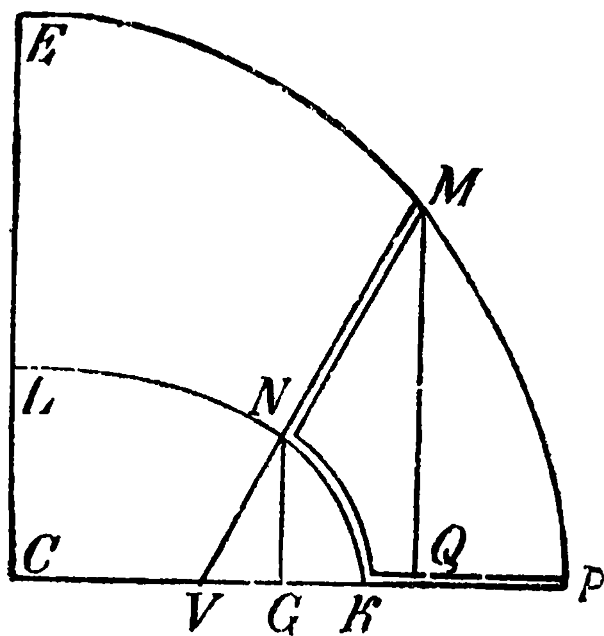
$$t-\frac{f}{2r}(t+s)^2\frac{z^2}{s^2}=A$$

представит собой уравнение сфероида.

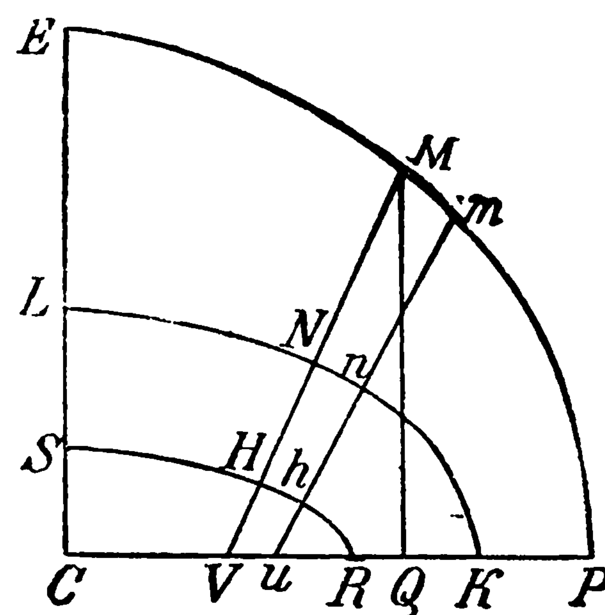
§ 40

Если взять за основу принцип Бугэ, то по первому впечатлению представляется, что те законы тяготения, на которых мы остановились выше, уже не могут быть согласованы с равновесием жидкостей.

Если бы мы пожелали найти уравнение сфероида, о котором шла речь в предыдущем параграфе, при помощи метода г-на Бугэ, который состоит в уравнивании веса столбов MV



Фиг. 22.



Фиг. 23.

и PV [фиг. 23], то необходимо было бы сделать некоторое, довольно тонкое, замечание; иначе мы пришли бы не к тому уравнению, которое было найдено предыдущим методом, а к другому; это уравнение было бы, таким образом, не соот-

ветствующим принципу г-на Гюйгенса. Отсюда следовало бы, что бесчисленное множество гипотез о законе действия тяготения, повидимому, не согласовалось бы с равновесием жидкостей, хотя в действительности они и ему соответствуют.

Предположим, например, что сила тяжести постоянна и равна единице; из равновесия каналов *MV* и *VP* [фиг. 23] должно было бы следовать, что вес *MV*, уменьшенный на центробежную силу, действующую по *QM*, должен быть равен весу *VP*; откуда мы получили бы уравнение сфероида

$$t + s - \frac{f}{r}(t+s)^2 \frac{z^2}{s^2} = A + u$$

Здесь сохранены те же обозначения [что и в задаче §§ 38 и 39 *] и, кроме того, *KV* обозначено через *u*.

Так как это уравнение отлично от полученного в § 39, то отсюда можно было бы заключить, что такой сфероид невозможен. Но если внимательно рассмотреть, к чему приводит закон тяготения, принятый нами [в § 38], то мы увидим, что вес *PV* нельзя считать пропорциональным линии *PV*, хотя тяжесть и постоянна.

Для доказательства этого утверждения положим, что *KR* есть радиус эволюты кривой *KNL* в точке *K*, допуская, что кривая в этой точке пересекает ее ось под прямым углом; тогда действие силы тяжести по *KR* будет несомненно выражаться линией *KR*, потому что кроме этой линии другого перпендикуляра к кривой *KNL* провести нельзя. Но, начиная от *R* и до *V*, например в точке *u*, направлениями тяжести будут, очевидно, перпендикуляры к ней *un*; это требуется для сохранения единообразия [непрерывности] или, лучше говоря, для того, чтобы избежать противоречия с условиями задачи § 38. Очевидно, было бы бессмысленно предположить, что тяжесть в *u* направлена по *uC*, считая точку *u* принадлежащей к столбу *VP*, и в то же время направлена по *un*, если считать,

---

* $VN = s$ и $NM = t$ (*Ред.*).

что эта точка принадлежит к столбу *unm*. Но если только предположить, — как это и необходимо, — что тяготение, действующее на частицы столба *VR*, направлено по *VN*, *un* и т. д., то легко понять, что вес *VR* будет тот же самый, что и вес *VH*, причем *SHR* есть кривая, имеющая общую эволюту с кривой *LNK*. Следовательно, вес *KV* будет выражаться линией *NV*, а не *KV*. Учитывая это, получим уравнение сфероида:

$$t + s - \frac{f}{2r}(t + s)^2 \frac{z^2}{s^2} = A + s$$

или

$$t - \frac{f}{2r}(t + s)^2 \frac{z^2}{s^2} = A$$

которое совпадает с уравнением § 39 [26].

Глава VIII

Другие способы применения принципа равновесия каналов любой формы при исследовании фигур планет

В главах V и VI я дал общий метод для выяснения, может ли любой данный закон тяготения допускать равновесие жидкостей; но если этот метод обладает преимуществом общности, то он не всегда имеет за собой наибольшую простоту. Мы видели примеры этого в главе II и в предыдущей, где гораздо проще было рассматривать притяжение в его естественном направлении, вместо того чтобы разлагать его на две силы, перпендикулярные обеим осям. Вот еще несколько примеров того же рода; при исследовании их легко удается найти наиболее короткий метод решения; его и следует применять в каждом частном случае.

§ 41

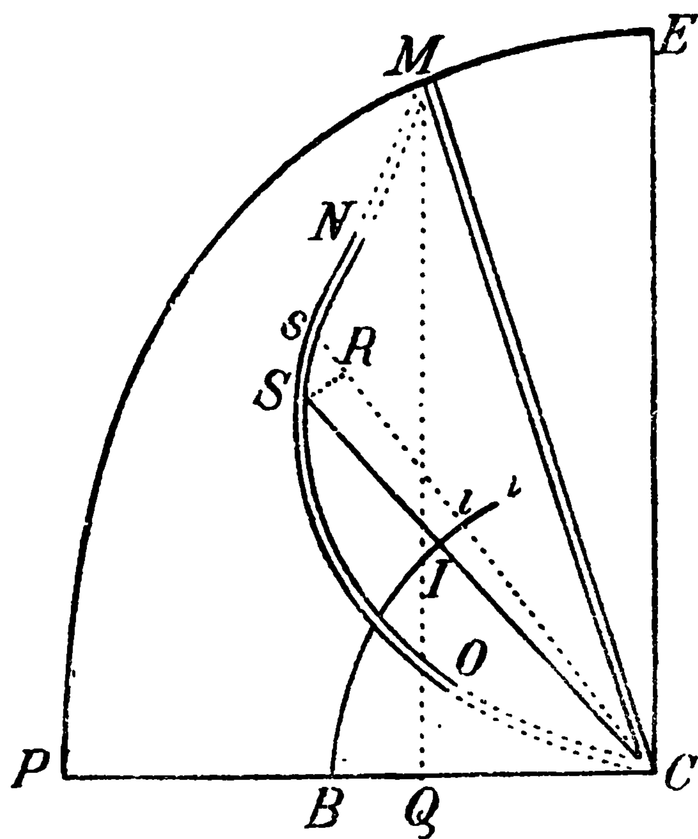
Найти условия, необходимые для равновесия жидкостей, когда тяжесть и ее направление заданы величинами, зависящими от радиуса и от угла между радиусом и осью

Пусть PE [фиг. 24] — сфероид и NO — произвольный канал, взятый внутри его. Пусть сила в каждой точке S разложена на две другие — одну по направлению к неподвижному центру C, и другую — по SR, перпендикулярно к SC. Пусть далее

$$CB = 1, \text{ дуга } BI = x, \quad CS = y$$
$$Ii = dx, \quad SR = y\,dx, \quad sR = dy$$

P — центральная сила,

Q — сила, перпендикулярная к SC.



Фиг. 24.

Вес малого цилиндра Ss, на который действуют эти две силы, будет $P\,dy + Qy\,dx$, так как он должен быть равен весу двух цилиндров SR и Rs. Интеграл этого дифференциала не должен зависеть от частного вида уравнения кривой ON; следовательно, повторяя рассуждения § 16, приходим к выводу, что для возможности существования сфероида необходимо, чтобы $P\,dy + Qy\,dx$ был *полным дифференциалом*. Отсюда получаем соотношение, которое должно иметь место между силами P и Q.

§ 42

Если бы оказалось затруднительным определить, представляет ли собой $P\,dy + Qy\,dx$ полный дифференциал, то достаточно проверить справедливость равенства [27]

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d(Qy)}{dy}$$

§ 43

Найти общее уравнение сфероидов в предыдущих предположениях

Если мы предположим, что произвольный канал, вес которого выражается интегралом от $P\,dy + Qy\,dx$, простирается от центра C до какой-нибудь точки M на поверхности, и если мы вычтем из веса этого канала действие центробежной силы, или сумму центробежных усилий частиц жидкости в MQ, т. е. на перпендикуляре к оси, то остаток должен быть величиной постоянной.

Полагая, следовательно, $QM = z$ и обозначая центробежную силу на расстоянии, равном r, через f, получим, что

$$\int (P\,dy + Qy\,dx) - \frac{fz^2}{2r} = A$$

будет уравнением сфероида.

§ 44

Если сила, действующая по направлению к центру, есть любая функция Y от расстояния до центра и если сила, перпендикулярная к этому направлению, имеет выражением $\frac{X}{y}$, где X — функция дуги x или величин, от нее зависящих, то очевидно, что равновесие всегда возможно и что уравнение сфероида в этих случаях таково:

$$\int X\,dx + \int Y\,dy - \frac{fz^2}{2r} = A$$

§ 45

Объяснение некоторого парадокса, возникающего в только что рассмотренном случае

Предположим, что требуется найти уравнение сфероида, о котором шла речь в предыдущем параграфе, на основании обычного принципа равновесия центральных и прямых столбов;

5*

вес столба CM будет тогда просто $\int Y\,dy$, так как сила, действующая перпендикулярно к CM, не оказывает влияния в этом столбе. Вычитая затем из $\int Y\,dy$ сумму центробежных сил $\frac{fz^2}{2r}$, получим для сфероида уравнение

$$\int Y\,dy - \frac{fz^2}{2r} = A$$

Но в то же время, на основании принципа г-на Гюйгенса, мы приходим к уравнению

$$\int Y\,dy + \int X\,dx - \frac{fz^2}{2r} = A$$

Не находя ошибки в столь простом рассуждении, которое дает, что вес CM равен $\int Y\,dy$, что можем мы вывести из этого, как не то, что принятый здесь закон тяготения не совместим с равновесием жидкостей? [28].

Хотя вследствие предыдущего решения мы уверены, что все каналы любой формы $CONM$ будут в равновесии, однако было бы достаточно, чтобы два прямые столба, исходящие из центра, не были одного веса, чтобы нарушить общее равновесие и, следовательно, чтобы заставить отказаться от принятого закона действия тяжести.

Поэтому, отбросив тот закон тяготения [о котором шла речь в § 44], можно было бы решить, что допустимы только такие законы, где центральное притяжение зависит от y и от x, но так чтобы $\int P\,dy$ при постоянном x дал ту же величину, как

$$\int (P\,dy + Qy\,dx)$$

если $P\,dy + Qy\,dx$ есть полный дифференциал.

Это имеет место, например, когда $P = x^2 y$ и $Q = xy$ или когда

$$P = \frac{x}{\sqrt{a^2 + xy}} \text{ и } Q = \frac{1}{\sqrt{a^2 + xy}}$$

и т. д. Однако и при допущении, что P есть функция от x и y, в некоторых случаях может возникнуть такое же затруднение, какое, казалось бы, встречается только, когда P содержит только переменную y.

Например, пусть

$$P = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad Q = \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Выражение $P\,dy + Qy\,dx$ будет полным дифференциалом, интеграл которого равен $\sqrt{x^2 + y^2}$; следовательно, согласно § 41, сфероид возможен, и уравнение его имеет вид:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{fz^2}{2r} = A$$

Между тем, если искать уравнение сфероида по способу равновесия центральных и прямых столбов, найдем уравнение:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x - \frac{fz^2}{2r} = A$$

Действительно, так как центральная сила равна $\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$, то вес любого прямого центрального столба равен интегралу от

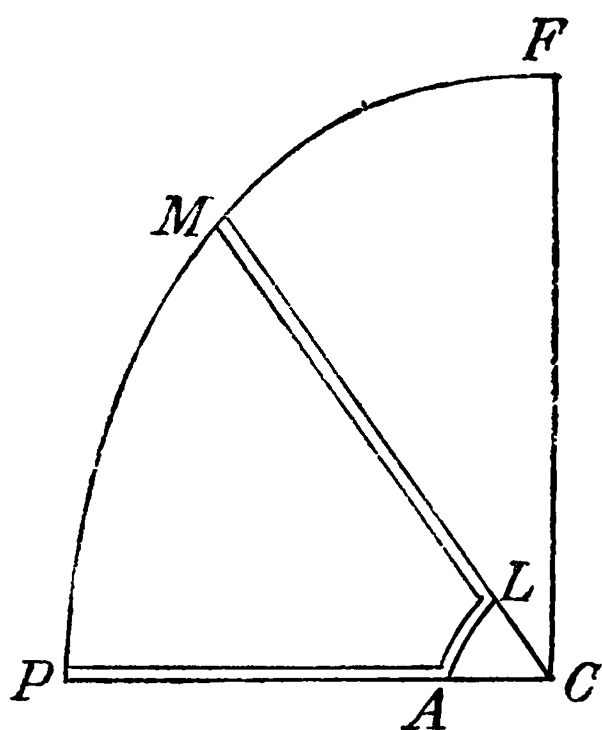
$$\frac{y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

при постоянном x, т. е. $\sqrt{x^2 + y^2} - x$ (где вычитается постоянная x, так как при $y = 0$ вес должен быть равен нулю). Вычитая из этого интеграла значение суммы центробежных сил $fz^2/2r$ и приравнивая остаток постоянной A, получим уравнение сфероида:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x - \frac{fz^2}{2r} = A$$

Но так как это уравнение не совпадает с полученным по принципу равновесия любых каналов, естественно заключить, что [принятое в § 44] предположение относительно закона притяжения тоже принадлежит к числу тех, которые не совместимы с равновесием жидкостей.

Однако малейшее отклонение от общего правила возбуждает сомнение во всем остальном, если только не видно ясно, что̀ выделяет те случаи, где общее правило не применимо; рассмотрим поэтому, имеется ли здесь основание, чтобы говорить об исключениях, и как далеко может распространяться их значение.



Фиг. 25.

Вернемся сначала к случаю, когда центральное притяжение есть функция расстояния от центра. При определении веса прямолинейного столба, оканчивающегося в центре, представляется совершенно естественным отбросить силу Q, действующую перпендикулярно к направлению столба; заметим, однако, что выражение этой силы X/y обращается в бесконечность при $y = 0$; отсюда следует, что капля воды, находящаяся в C [фиг. 24], может быть подвержена действию конечной силы и начать движение по кругу; таким образом, член $\int Y\,dy$ вовсе не единственный, который нужно вычислить для определения усилия в столбе.

Однако, для того чтобы этот ответ не казался парадоксом возьмем, вместо двух столбов PC и CM, канал $PALM$ [фиг. 25], образованный двумя столбиками PA, ML и дугой круга AL, описанной из центра C заданным радиусом $CA = a$. Так как X/a выражает силу, действующую в направлении дуги AL, то $\int X\,dx$ будет выражать вес этой дуги. Но радиус CA не входит вовсе в это выражение, а это означает, что самая малая

дуга AL будет весить столько же, сколько и самая большая, если она содержит столько же [угловых] градусов; следовательно, когда эта дуга совершенно сходит на-нет в точке C, то ее вес все-таки остается равным $\int X\,dx$, и общий вес MC определяется формулой

$$\int Y\,dy + \int X\,dx - \frac{fz^2}{2r}$$

и это выражение, приравненное постоянной A, дает истинное уравнение сфероида.

Совершенно так же в случае, когда центральная сила равна $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, а сила, перпендикулярная к радиусу, есть $\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$, вес дуги AL радиуса a будет: $\sqrt{x^2+y^2} - a$.

Уменьшая затем радиус до нуля, мы получим тогда, что вес дуги AL, стянутой в точку C, равен x; прибавив эту величину к $\sqrt{x^2+y} - x - \frac{fz^2}{2r}$, найдем опять уравнение сфероида в виде:

$$\sqrt{x+y^2} - \frac{fz^2}{2r} = A.$$

Итак, все наши предположения восстановлены.

§ 46

Предполагая, что тяжесть во всех частях жидкой массы вызывается несколькими произвольными силами, действующими по заданным направлениям, требуется определить, может ли в общем случае образоваться сфероид, и найти его уравнение

Пусть ON [фиг. 26] — произвольный канал; Nn — один из его элементов, NP, NQ, NR, NS — направления заданных сил; P, Q, R, S и т. д. — функции, выражающие эти силы.

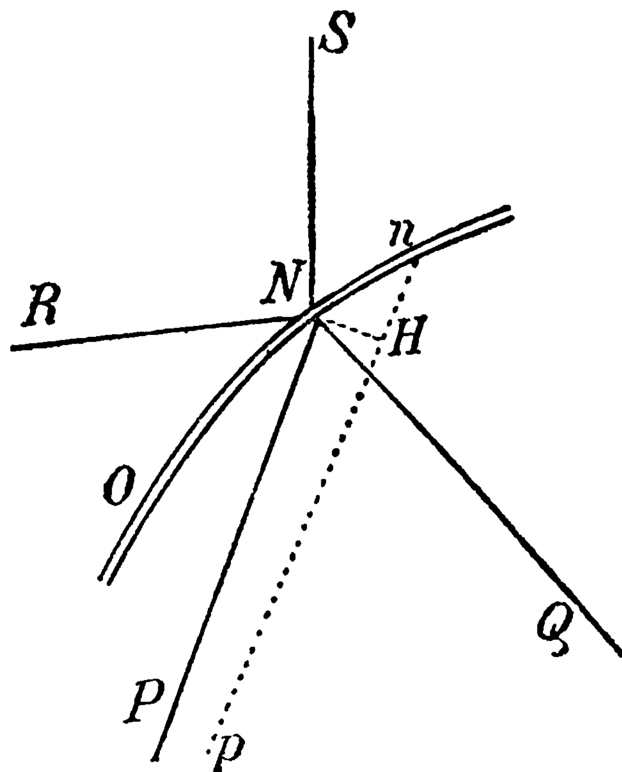
Проведя через точку n прямую np, совпадающую с направлением силы P в точке n, опустим из точки N на np пер

пендикуляр NH и обозначим через dz отрезок nH. Ту же операцию произведем с силами Q, R и т. д. и назовем du, dt и т. д. линии, аналогичные nH. После этого легко видеть, что *для равновесия сфероида необходимо, чтобы*

$$P\,dz + Q\,du + R\,dt \quad \text{и т. д.}$$

было полным дифференциалом.

Но положение любой точки M зависит только от двух переменных; поэтому решить, допустимо ли какое-либо пред-



Фиг. 26.

положение о законе тяготения, можно будет только после того, как выражение $P\,dz + Q\,du + R\,dt +$ и т. д. будет приведено к двум переменным, потому что все переменные z, u, t и т. д. и другие, входящие в P, Q, R и т. д., всегда сведутся к двум. Однако в этой редукции не будет необходимости, если мы заметим, что $P\,dz + Q\,du + R\,dt +$ и т. д. со всеми его переменными есть полный дифференциал.

Очевидно, что *если* $P\,dz + Q\,du + R\,dt + \ldots$ *и т. д. есть полный дифференциал, то его интеграл, приравненный постоянной, даст уравнение сфероида.*

Если сфероид вращается, то центробежная сила должна войти в число сил P, Q, R и т. д.

Глава IX

О равновесии жидкости, поверхность которой может иметь форму, отличную от сфероида, образованного вращением кривой около ее оси

§ 47

Во всем предшествующем я рассматривал только такие законы притяжения, где эта сила одна и та же во всех точках окружности с центром на оси; действительно, имея в виду только фигуру планет, было бы бесполезно обобщать задачи и рассматривать законы, при которых жидкие массы могли бы принять форму, отличную от сфероида. Но так как исследование фигуры планет не единственный вопрос, на который можно распространить обычные начала гидростатики, и так как нужно добавить очень немногое к предыдущей теории, чтобы сделать ее применимой к жидкостям, когда частицы их подвержены действию сил, направления которых меняются самым общим образом, — то я считал, что будет уместно остановиться на этом здесь.

Вопросы, где теория жидкостей должна рассматриваться в такой большой общности, довольно интересны для физиков; здесь будет итти речь, например, о причинах, заставляющих воду подниматься в капиллярных трубках, а ртуть, наоборот, опускаться вниз. Здесь мы стремимся узнать, почему жидкости в очень малых количествах не располагаются по уровню, почему они прилипают к краям некоторых тел и устремляются прочь от других; почему их поверхность во всех случаях имеет определенную кривизну вместо того, чтобы быть плоской; и множество других явлений той же природы. Не вызывает сомнений, что объяснение этих явлений не может быть полным без теории жидкостей, в ее общем виде. Потому что, на мой взгляд, необходимо предполагать, что законы гидростатики соблюдаются в самой малой капле так же, как и в весьма

значительной массе жидкости. Поэтому, если одна часть жидкости располагается выше других ее частей или если поверхность жидкости не горизонтальна и т. д., то должна существовать, кроме тяготения, еще и другая сила, действующая на частицы этой массы и заставляющая их двигаться по иному направлению, чем все тяжелые тела. И так как кривизна поверхности этих небольших масс жидкости зависит от кривизны тел, которых они касаются, то вопрос не может быть рассмотрен в общем виде иначе, как путем исследования условий равновесия жидкости, все части которой подвержены действию сил, произвольно направленных; к этому мы теперь и перейдем.

§ 48

Предполагая, что сила, приводящая в движение частицы жидкости, разложена на три составляющих, из которых одна действует перпендикулярно некоторой плоскости QAP, вторая и третья — по направлениям, параллельным двум прямым QA, AP, лежащим в этой плоскости и образующим прямой угол, требуется установить, какое соотношение должно иметь место между этими тремя силами, для того чтобы было возможно равновесие жидкости

Согласно § 3, жидкая масса может быть в равновесии только в том случае, когда произвольный замкнутый канал находится в равновесии, или, что то же самое, когда вес произвольного канала DN равен весу любого канала, проходящего через те же точки D и N. Остается только выразить это условие; при этом мы будем придерживаться того же метода, как в § 16, т. е. должны будем определить сумму весов всех малых цилиндров Nn, заключающихся в канале DN, как функцию от трех координат кривой двоякой кривизны DN, не зависящую от вида этой кривой.

Проведя MN [фиг. 27] перпендикулярно к плоскости QAP и MP перпендикулярно к AP и, далее, ns, sr и rN параллельно трем координатам NM, MP и AP, положим

$$AP = x, \quad PM = y, \quad MN = z$$

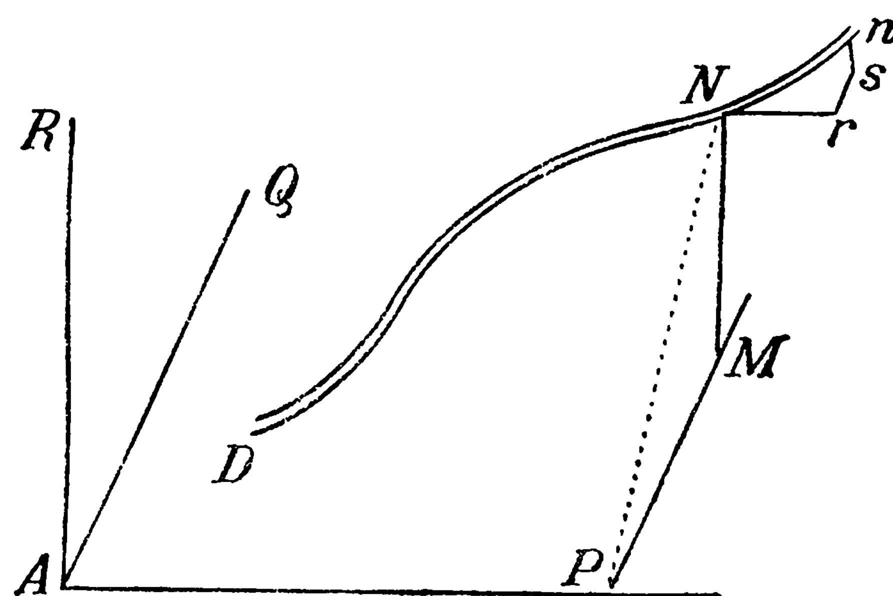
$$Nr = dx, \quad sr = dy, \quad sn = dz.$$

Обозначим через

P — силу вдоль NM

Q — силу, параллельную MP

R — силу, параллельную PA.



Фиг. 27.

Умножая, затем, [массу] цилиндра Nn на каждую из трех сил, полученных, если взять составляющие трех предыдущих сил по направлению Nn [29], получим для веса этого малого цилиндра выражение

$$P\,dz + Q\,dy + R\,dx$$

следовательно, интеграл от этой величины представит собой вес канала DN. Но по тем же соображениям, как и в § 16, очевидно, что для того, чтобы этот интеграл не зависел от специальной формы кривой DN, необходимо, чтобы

$$P\,dz + Q\,dy + R\,dx$$

было полным дифференциалом некоторой функции от x, y, z, алгебраической или зависящей от квадратур.

§ 49

Можно было бы определить зависимость между тремя силами P, Q, R, применяя принцип, изложенный в § 21, именно — равенство давления уровенных поверхностей; мы пришли бы к тому же самому результату, как и только что изложенным способом.

§ 50

Если непосредственно не усматривается, представляет ли $P\,dz + Q\,dy + R\,dx$ полный дифференциал, то нужно воспользоваться методом, предложенным мною в Мемуарах Академии,* т. е. проверить, удовлетворяются ли равенства

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dz}; \quad \frac{dP}{dx} = \frac{dR}{dz}; \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{dR}{dy}$$

§ 51

Установив, что $P\,dz + Q\,dy + R\,dx$ есть полный дифференциал, достаточно найти его интеграл и приравнять его постоянной, чтобы получить уравнение поверхности жидкой массы, части которой подвержены действию сил P, Q, R. Все это совершенно очевидно, поскольку для равновесия жидкой массы требуется, чтобы каналы, выходящие из одной точки и кончающиеся на поверхности, были в равновесии.

§ 52

Если масса жидкости, части которой подвергаются действию сил P, Q, R, вращается вокруг оси x, то легко найти при помощи рассуждений, примененных в § 18, что

$$\int (P\,dz + Q\,dy + R\,dx) - \frac{f}{2r}(y^2 + z^2) = A$$

* 1740 год, стр. 304.

представит собой уравнение поверхности этой жидкой массы, сохраняющей равновесие во время вращения. Здесь f есть центробежная сила на расстоянии r от оси вращения.

§ 53

На первый взгляд представляется удивительным, что жидкая масса может вращаться вокруг оси, не принимая фигуры тела вращения, так как эффект вращения, как кажется, приводит к тому, чтобы расположить частицы по кругам; однако, если вспомнить сказанное во Введении, то мы увидим, что вращение вызывает только появление силы, удаляющей частицы от оси. Но эта сила в соединении с силами P, Q, R вовсе не должна создать такую силу тяжести, направление которой было бы одинаково во всех точках окружности, центр которой лежит на оси вращения; между тем, именно это условие необходимо для того, чтобы жидкая масса приняла форму тела вращения [[30]].

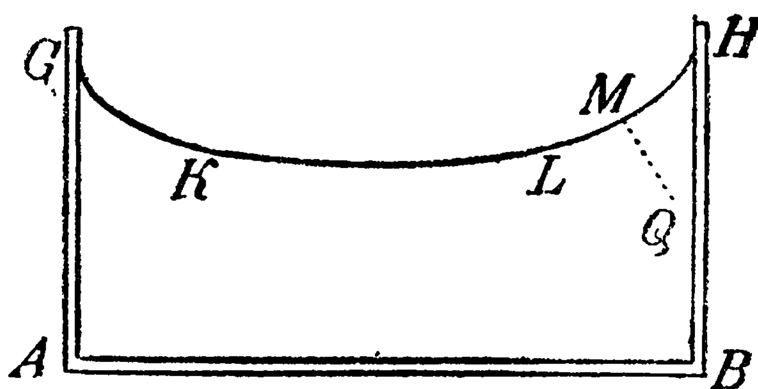
§ 54

Все частицы жидкой массы могут быть во взаимном равновесии, если на них действует сила, равная сумме их взаимных притяжений, а также сила тяжести и сила притяжения любого тела, которое касается этой жидкой массы.

Предыдущий метод достаточен, чтобы определить, может ли жидкая масса находиться в равновесии, когда сила, действующая на все частицы, задается алгебраическим выражением или когда значение ее может быть найдено при помощи квадратур, — как это имеет место, когда сила зависит только от притяжения телом данной формы. Но этот метод не будет достаточен, если сила зависит еще от притяжения частей самой жидкости, потому что тогда для применения его тре-

буется предварительно определить фигуру поверхности жидкой массы, — что было бы чрезвычайно затруднительно. Однако при заданных теперь условиях очень легко доказать равновесие частей жидкости, пользуясь теми же рассуждениями, которые были применены в главе II.

Пусть *M* [фиг. 28] — произвольная частица поверхности *KLM* жидкой массы, находящейся в сосуде; *BH* — одна из стенок этого сосуда или погруженного в нее тела. Не определяя формы этой поверхности, мы видим, все-таки, что ее всегда можно задать так, чтобы общая сила, действующая на частицу *M*, которая притягивается тремя силами — именно



Фиг. 28.

силой тяжести, притяжением жидкой массы и притяжением сосуда, приняла направление *MQ*, перпендикулярное к касательной плоскости в точке *M*. Поэтому остается только убедиться, будет ли существовать равновесие внутри самой жидкости. Но в § 3 мы видели, что этот вопрос сводится к условию, чтобы любой замкнутый канал, находящийся внутри жидкой массы *AGKLMHB*, находился в равновесии. Кроме того, из § 9 известно, что если все части замкнутого канала притягиваются к неподвижной точке с силой, являющейся функцией расстояния до этой точки, то канал будет в равновесии. Поэтому, рассматривая все атомы, из которых образованы и жидкость и сосуд, как центры притяжения, мы убедимся, что каждый из этих центров не нарушит равновесия канала. Что же касается силы тяжести, то совершенно ясно, что она также не может его нарушить; следовательно, канал и вся масса жидкости будут в равновесии.

Глава X

О поднятии или опускании жидкостей в капиллярных трубках*

§ 55

Из всех явлений, о которых мы говорили в § 47, нарушение горизонтального уровня в капиллярных трубках есть единственное, на котором здесь стоит остановиться. Действительно, шарообразность капель жидкости, вогнутость поверхности воды около стекла, выпуклость ртути и т. д. — так легко объяснимы при помощи притяжения, что для этого достаточно перечесть то, что было сказано в § 54.

Желающим ознакомиться с наиболее любопытными явлениями, обнаруженными в капиллярных трубках, достаточно прочесть прекрасную диссертацию г-на Жюрена в Philosophical Transactions.** Они найдут там искусно подобранные опыты, произведенные для того, чтобы подойти к самым причинам этих явлений. Но хотя в этой работе есть много поучительного, я, признаюсь, не мог удовлетвориться теорией г-на Жюрена и полагаю, что исследование этого вопроса требует большего числа [физических] принципов, чем их применил автор этой работы.

§ 56

То место в его мемуаре, которое привело меня к этому убеждению, находится там, где он возражает г-ну Гауксби (Hauksbee), который объясняет поднятие столба жидкости в капиллярной трубке притяжением всей поверхностью стекла, касающейся жидкости. Г-н Жюрен утверждает, наоборот, что поднятие жидкости должно быть приписано действию только

* [31].

** Jurin, Philosophical Transactions, 1718, p. 739; 1719, p. 108 (*Ред.*).

незначительной кольцеобразной части, находящейся над водою. Чтобы это доказать, он начинает с замечания, что высота воды, поднявшейся в трубке, всегда обратно пропорциональна ее диаметру. Отсюда следует, что внутренняя поверхность трубки, касающаяся воды, остается одинаковой во всех случаях. Но так как вес поднявшейся воды, напротив того, пропорционален диаметру, то г-н Жюрен заключает, что вода не может подниматься вследствие притяжения поверхности, так как постоянная причина вызывала бы здесь переменное действие; поэтому он приписывает подъем воды притяжению той части стекла, которая вроде некоторого кольца поднимается над водой: потому что окружность, или, лучше сказать, малая поверхность этого кольца, пропорциональна количеству поднятой воды.

§ 57

Я изложу теперь мои возражения против этих рассуждений.

1. Применять принцип „следствия пропорциональны причинам“ — можно только, дойдя до первой и единственной причины явления; но его нельзя применять, когда исследуется результат воздействий нескольких частных причин, из которых каждая не может быть учтена в отдельности. Но когда сравнивают подъем воды в двух различных трубках, то притяжение каждой такой поверхности есть результат притяжений каждой частицы стекла на все частицы воды; и так как все те малые силы, из которых образуется общая сила действия какой-либо из этих поверхностей, не равны между собой, то нет никакого основания заключать о равенстве притяжения двумя поверхностями потому, что площади их равны; здесь необходимо еще, чтобы поверхности были подобны [pareilles]. По этой же самой причине, даже если бы мы допустили, что причиной подъема воды является только стеклянное кольцо, находящееся над водой, мы не могли бы заключить отсюда, что вес поднятой воды должен быть пропорционален диаметру

трубки, потому что силу притяжения этого кольца мы можем найти, только взяв сумму притяжений всех его частей.

2. Допустим, что мы нашли бы, что притяжение стеклянного кольца находится в постоянном отношении к его диаметру; из этого мы не могли бы заключить, что столб воды, вес которого пропорционален этой силе, будет поднят ею вверх и там удержится. Вполне понятно, что твердое тело, поднятое кверху силой, равной его весу, не падает. Но если это тело жидкое, то его части друг с другом не связаны, и надо доказать, что они друг друга поддерживают. Поэтому я буду рассматривать вопрос о капиллярных трубках, исходя из общих законов равновесия жидкостей.

§ 58

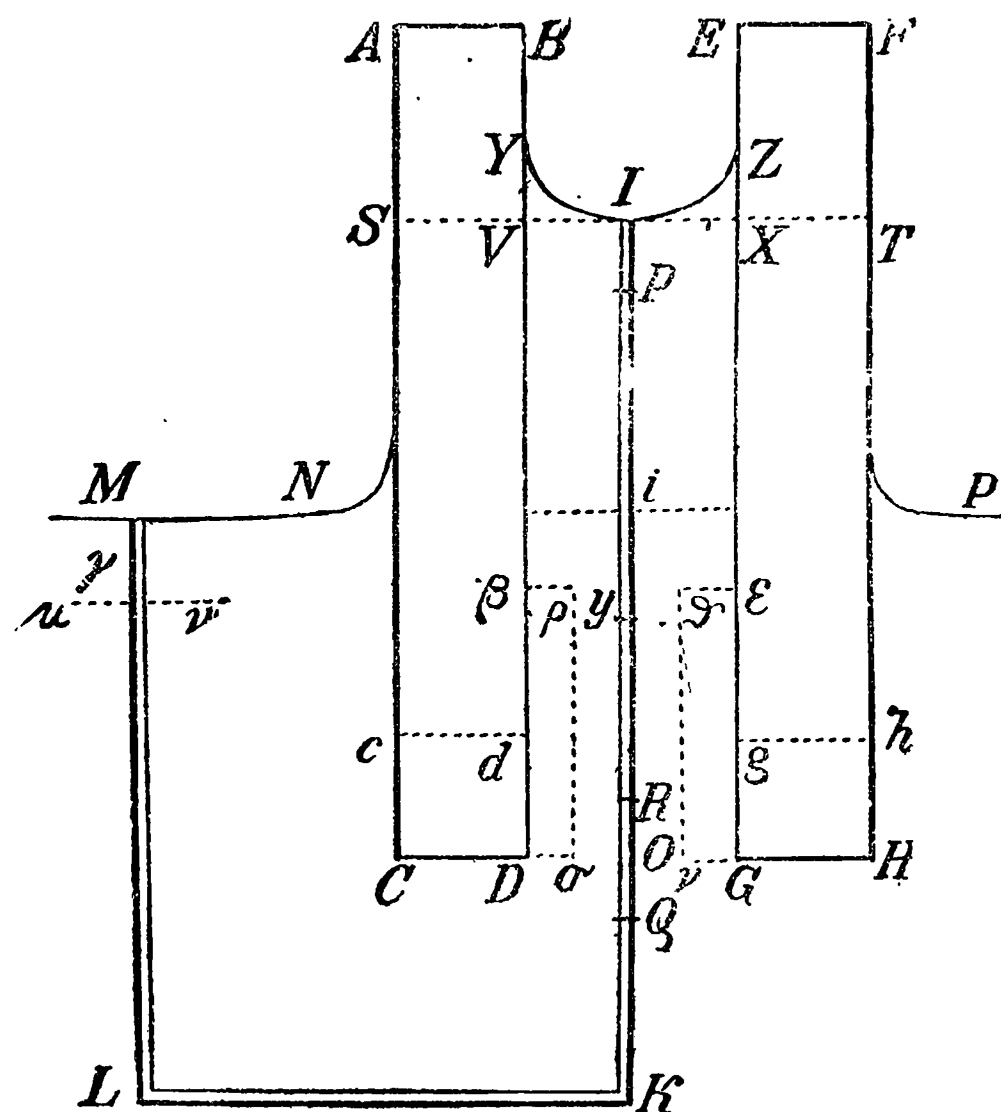
В этом исследовании я буду считать частицы воды как бы совершенно скользкими и бесконечно малыми по отношению к диаметру трубки; вещество этой трубки я буду считать вполне однородным, а поверхность ее совершенно гладкой. Кроме того, я приму одну и ту же функцию расстояния как для притяжения, развиваемого веществом трубки, так и для притяжения частей жидкости, отличая эти притяжения только коэффициентами или интенсивностями.

§ 59

Исследование сил, поддерживающих воду в капиллярных трубках

Пусть $ABCDEFGH$ [фиг. 29] — сечение капиллярной трубки плоскостью, проходящей через ось; MNP — уровень воды, в которую опущена трубка; Ii — высота, на которую поднялась вода в трубке; $Y'Z$ — та небольшая вогнутая кривая, форму которой вынуждена принять вода под действием притяжения стекла. Пусть, кроме того, $IKLM$ представляет собой бесконечно тонкий канал, у которого две ветви IK и ML верти-

кальны, а ветвь LK горизонтальна; первая совпадает с осью трубки, вторая и третья настолько удалены от стекла, что его притяжение там нечувствительно. Я буду исследовать, какие силы действуют на части каналов ML и IK, чтобы



Фиг. 29.

выяснить, могут ли эти столбы находиться в равновесии, несмотря на то, что длина их неодинакова.

Начну с того, что введу следующие обозначения:

b — внутренний радиус трубки,
h — интенсивность притяжения стекла,
k — интенсивность притяжения воды,
p — сила тяжести.

Далее я предположу, что функция расстояния, выражающая закон притяжения как стекла, так и воды, задана и что вычислены:

1) Сила, с которой частица, помещенная на расстоянии x от плоскости MN, притягивается телом, внешней поверхностью которого является эта плоскость; обозначая эту силу через $[x]$, я при этом считаю, что интенсивность притяжения, развиваемого этим телом, равна единице. Я применяю выражение $[x]$, чтобы обозначить функцию от x, в которую размеры притягивающего тела не входят; действительно, я предполагаю это тело достаточно большим, чтобы его можно было считать как бы бесконечным; это допустимо ввиду предположения, что притяжение имеет заметную величину только на весьма малом расстоянии.

2) Сила, с которой трубка или полый цилиндр $CDAB$ $GHEF$ притягивает частицу Q, помещенную на расстоянии $QO = x$ от поверхности CH; я обозначаю эту силу через $[b, x]$, предполагая, что интенсивность притяжения снова равна единице. Понятно, что под $[b, x]$ я подразумеваю функцию, в которую не входят ни толщина, ни высота трубки, считаемые бесконечными.

3) Сила, с которой частица p, находящаяся на расстоянии x от VX, притягивается малой массой воды $YVXZ$; эту силу я обозначаю через $[b, x, h, k]$.

Установив это, я утверждаю, что в столбе ML действуют две силы, которыми он устремляется вниз: одна — это сила тяжести, действующая по всей длине ML, другая — притяжение частицами воды, которая действует только по направлению к M. Пусть γ — частица, находящаяся на очень малом расстоянии x от MN; $\mu\nu$ — плоскость, параллельная MN и проведенная так, чтобы γ находилась посредине между обеими плоскостями. Ясно, что вода, заключенная в этом промежутке, не будет действовать на частицу γ, но вода, находящаяся под плоскостью $\mu\nu$, будет тянуть γ книзу, и выражение для ее притягательной силы будет $k[x]$. Следовательно, вес ML будет

$$p \cdot ML + k \int [x]\, dx$$

предполагая, что $[x]dx$ проинтегрировано и что в интеграле положено $x = \infty$.

Для того чтобы найти вес столба IK, я замечу сначала, что притяжение трубки не оказывает никакого влияния на вес частей, прилежащих к концу I; потому что, если верхняя часть трубки $ABVSEXTF$ тянет кверху частицы жидкости, находящиеся около I, то часть трубки под поверхностью ST тянет их с такой же силой вниз. Следовательно, не меняя сущности задачи, можно считать, что трубка состоит из вещества, однородного с водой, когда речь идет о конце I.

Но при этом предположении вещество под плоскостью $SVIXT$ будет тянуть вниз частицы, соседние с p, с силой, выражаемой через $k[x]$, если малое расстояние Ip обозначить через x. Но полый цилиндр $ABSVEXTF$ будет притягивать те же частицы кверху с силой $k[b, x]$, а масса воды $YVXZ$ будет притягивать их в том же направлении с силой $[b, x, h, k]$. Следовательно, полная сила, действующая на частицы около I, будет направлена вниз, и выражение ее есть:

$$k[x] - k[b, x] - [b, x, h, k]$$

Поэтому общий вес всех частей, близких к точке I, будет:

$$k\int [x]\,dx - k\int [b, x]\,dx - \int [b, x, h, k]\,dx$$

Теперь остается только изучить, что происходит у конца Q. Для этого вообразим под плоскостью CH трубку, подобную находящейся над нею, но сделанную из вещества, у которого интенсивность притяжения такая же, как у воды. Очевидно, что эта новая трубка будет тянуть вниз частицы, соседние с Q; но так как стеклянная трубка тянет те же части кверху с силой, превосходящей предыдущую в отношении $h:k$, то отсюда следует, что мы можем не рассматривать притяжения этой новой трубки и вообразить только, что трубка $ABCDEFGH$ состоит из вещества, у которого интенсивность притяжения есть $h - k$.

Что же касается притяжения воды, заключенной между YD, ZG, продолженными под DG, то ясно, что оно не должно итти в счет, так как действия частей, расположенных над DG, и частей под этой плоскостью взаимно уничтожаются.

Отсюда следует, что части жидкости около точки Q на расстоянии x от DG притягиваются кверху с силой $(h-k)\cdot[b, x]$. Кроме того, части ее около точки R над DG, на том же расстоянии x от этой плоскости, будут притягиваться кверху с той же силой $(h-k)[b, x]$. Потому что, если проведем ch параллельно CH на таком же расстоянии от R, как R отстоит от CH, то ясно, что трубка $ABcdEghF$ будет притягивать частицу в R вверх так же, как трубка $ABCDGHFE$ притягивает частицу Q. Таким образом, общий вес частей около конца трубки Q направлен вверх, и его выражение есть:

$$2(h-k)\int[b, x]\,dx$$

Следовательно, вес всего столба IK будет равен

$$p.IK+k\int[x]\,dx-k\int[b, x]\,dx$$
$$-\int[b, x, h, k]\,dx-2(h-k)\int[b, x]\,dx$$

Приравнивая это выражение весу столба ML, найдем, после преобразований, высоту воды Ii над уровнем:

$$\frac{(2h-k)\int[b, x]\,dx+\int[b, x, h, k]\,dx}{p}$$

Отсюда, даже не проводя дальнейших вычислений, чтобы определить, во что превратятся выражения $[b, x]$ и $[b, x, h, k]$ для различных видов функций, определяющих закон притяжения, мы легко увидим, что существует бесконечное множество законов притяжения, для которых предыдущее выражение Ii дает вполне заметную высоту, если b — диаметр трубки —

будет очень мал, и, наоборот, — высоту, почти равную нулю, если трубка будет немного пошире. Надо убедиться еще, что существует такой закон притяжения, при действии которого высота li будет обратно пропорциональна диаметру трубки, как того требует опыт.

§ 60

Из предыдущего выражения для li вытекает довольно замечательное предложение: *если даже сила притяжения капиллярной трубки слабее, чем притяжение воды, — лишь бы только она не была в два раза слабее, — вода все-таки поднимается в трубке.*

Действительно, из выражения $(2h-k)\int[b, x]\,dx$ видно, что всякий раз, как $k<2h$, высота li будет положительной.

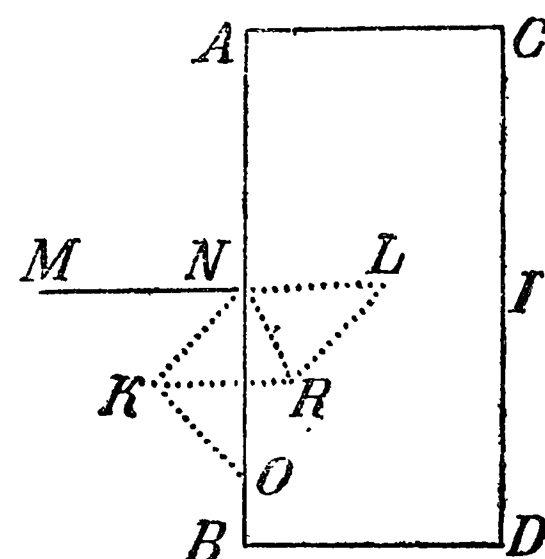
§ 61

Против этого аргумента можно, однако, сделать возражения; можно сказать, что мы не знаем, во что превращается величина $[b, x, h, k]$, выражающая притяжение малой массы воды $YVXZ$ на частицы, которые находятся около l; так как, если вода притягивает самое себя сильнее, чем ее притягивает трубка, то вполне может случиться, что кривая YIZ окажется снизу, так что член $\int[b, x, h, k]\,dx$ сделается отрицательным, и тогда заключение, к которому мы пришли в предыдущем параграфе, уже не могло бы иметь места.

§ 62

Для того чтобы избежать это затруднение, достаточно убедиться, что вода может образовать выпуклую кривую около границ погруженного в нее тела, хотя бы притяжение воды было больше, чем притяжение вещества тела. Пусть, напри-

мер, параллелепипед $ABCD$ [фиг. 30] изображает погруженное тело, горизонталь MN — поверхность воды. Определим направление силы, с которой частица, находящаяся в вершине угла N, притягивается как водой MNB, так и телом $ABCD$; предположим для этого, что NL выражает притяжение $ABCD$ на точку N, а NO — ту силу, с которой та же частица притягивалась бы вертикально, если бы все пространство под поверхность MI было заполнено водой. Очевидно, что если построить на NO равнобедренный прямоугольный треугольник NKO, то NK будет притяжением воды MNB на точку N; поэтому диагональ NR параллелограмма $NLRK$ даст направление полной силы, действующей на N. Но очевидно, что эта сила будет направлена внутрь тела $ABCD$, если NO меньше, чем $2 \cdot NL$. Следовательно, кривая, по которой вода касается тела $ABCD$, будет вогнута, так как малые части этой кривой должны быть перпендикулярны направлению сил, действующих на частицы воды.



Фиг. 30.

§ 63

О подъеме воды в капиллярном сосуде, состоящем из двух цилиндров неодинаковой толщины

Так как в сделанном мною перечне сил, вызывающих подъем воды в капиллярных трубках, притяжение нижнего конца имеет во всяком случае не меньшее значение, чем притяжение верхнего, то те лица, которым знакомы опыты г-на Жюрена, могут припомнить один, который на первый взгляд, казалось бы, опровергает предыдущие рассуждения. Этот опыт состоит в том, что если спаять две трубки разного диаметра и опустить более тонкий конец в воду, то

вода не поднимется выше, чем если бы диаметр трубки был везде такой, как у верхнего толстого конца.

Для объяснения этого явления вернемся к тому, о чем говорилось в § 59, но вообразим к тому же, что $D\sigma\rho\beta G\varepsilon\vartheta\nu$ есть новая стеклянная трубка, помещенная внутрь объема $BDEG$. Очевидно, что добавление этого цилиндра вызовет такое же действие, как трубка, состоящая из двух спаянных трубок, о которой мы только что говорили. Но так как в предыдущих вычислениях мы полагали, что пространство $D\beta\rho\sigma G\varepsilon\vartheta\nu$ заполнено водой, а не стеклом, то к силам, действующим на столб IK, надо прибавить теперь действие притяжения полого цилиндра $D\beta\rho\sigma G\varepsilon\vartheta\nu$, предполагая, что он состоит из вещества, притяжение которого имеет интенсивность $h-k$. Однако легко видеть, что это действие равно нулю, так как, если край $D\sigma\nu G$ тянет вверх частицы, прилежащие к O, то край $\beta\rho\vartheta\varepsilon$ будет тянуть вниз с той же силой частицы, соседние с y. Следовательно, IK будет иметь тот же вес, как до прибавления трубки $D\beta\rho\sigma\vartheta\nu G\varepsilon$. Поэтому высота нашего столба останется всегда одинаковой.

§ 64

Отнюдь не труднее объяснить, почему в трубке, составленной из двух трубок разного диаметра и опущенной более широким концом в воду, высота столба, поднимающегося в этой трубке, будет такая же, как если бы трубка представляла собой один цилиндр такой же толщины, как верхняя часть.

§ 65

Наконец, что касается явления опускания ртути в капиллярных трубках, то я не буду останавливаться на его объяснении; действительно, совершенно достаточно только что примененных мною принципов, чтобы показать, что силы,

которые тянут вниз столб ртути в трубке, превышают силы, действующие в других столбах, так что столб ртути и должен быть самым коротким.

Глава XI

О равновесии частей планеты, образованной из различных жидкостей, которые, по предположению, не смешиваются друг с другом

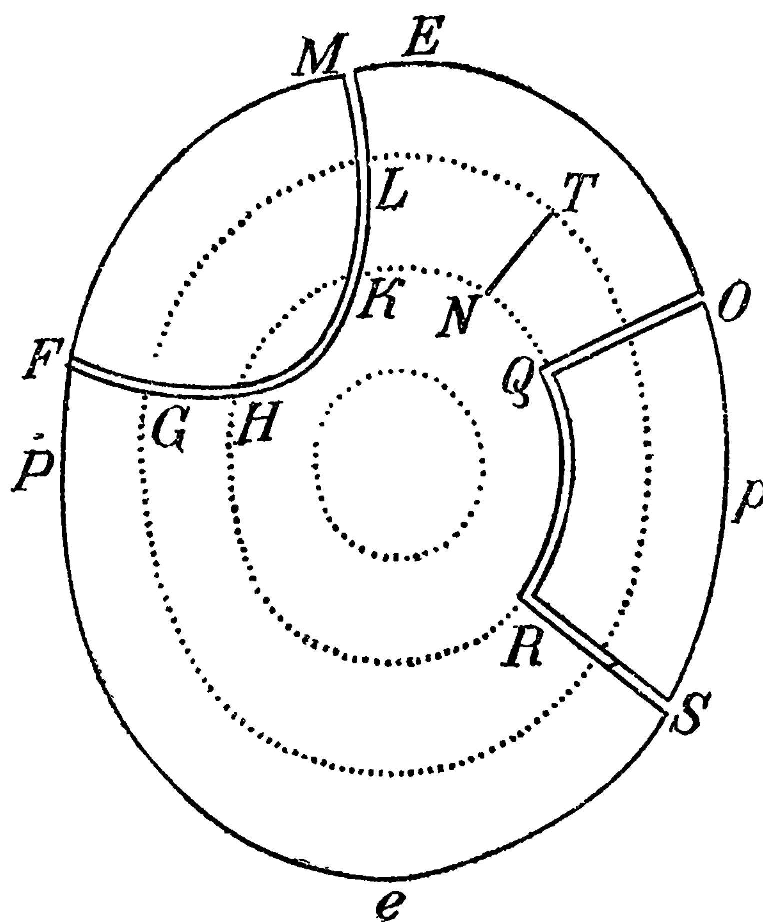
§ 66

В скоплении нескольких жидкостей, которые, по предположению, пришли в состояние равновесия, поверхность, ограничивающая верхнюю жидкость, и поверхности, отделяющие различные внутренние жидкости, должны быть таковы, что во всех их точках они перпендикулярны направлению тяжести.

Легко видеть, прежде всего, что внешняя поверхность $PEpe$ [фиг. 31] должна быть перпендикулярна к направлению тяжести, потому что в планете, образованной из различных жидкостей, так же как и в однородной, каждая частица M на поверхности должна была бы стекать в направлении склона поверхности, если бы вес ее не был направлен перпендикулярно к плоскости, касательной к поверхности в точке M.

Для того чтобы доказать, что внутренние поверхности, отделяющие различные жидкости, обладают тем же свойством, представим себе канал $OQRS$, соединяющий две точки O и S поверхности $PEpe$ так, что две ветви его QO и SR кончаются на одном и том же слое QR, а третья ветвь лежит на поверхности этого слоя; предположим далее, что ветвь QR или погружена на бесконечно малую глубину во внутреннюю жидкость, или приподнята на бесконечно малую высоту

в верхнюю жидкость. Очевидно, что вес OQ и SR от этого заметно не изменится; но вес RQ был бы совершенно иной, если бы на поверхности RQ действовала сила, направленная к R или к Q. Поэтому необходимо, чтобы направление тяжести было перпендикулярно к поверхности $QRHK$, для



Фиг. 31.

того чтобы канал $OQRS$ мог быть в равновесии и, следовательно, чтобы весь сфероид мог сохранять постоянную фигуру.

§ 67

Условия, определяющие законы действия тяготения, при которых планеты, образованные из различных жидкостей, могут сохранять постоянную форму, остаются теми же самыми, какие были выведены для однородных планет.

Так как любой замкнутый канал должен быть в равновесии и каждый слой жидкости по необходимости однороден, то очевидно, что ни один закон силы тяжести не может

соответствовать условиям равновесия планеты, образованной из различных жидкостей, если он в то же время не обусловливает равновесия однородных планет.

Для доказательства обратного предложения, т. е. что закон силы тяжести, соответствующий условиям равновесия однородных планет, обусловливает также равновесие планет, состоящих из различных жидкостей, заметим следующее: если замкнутые каналы внутри любого слоя будут в равновесии при данном законе силы тяжести, то две трубки GH и LK, заканчивающиеся на двух поверхностях одного и того же слоя, необходимо будут одинакового веса; но если веса трубок FG, ML и GH, LK и т. д. соответственно равны, то любой канал $FGHKLM$, пересекающий сколько угодно жидкостей, будет всегда в равновесии. Следовательно, и т. д.

§ 68

Можно было бы довольно легко доказать предыдущие положения, применяя принцип, которым мы пользовались в главе V. Предположим опять, что однородная планета разделена на бесконечное множество уровенных слоев, т. е. слоев, поверхности которых во всех точках перпендикулярны к направлению тяжести. Мы видели, что для равновесия жидкости необходимо, чтобы сила тяжести в любой точке N слоя была обратно пропорциональна толщине слоя NT в этой точке; отсюда вытекало, что давление одинаково во всех точках жидкости под этим слоем. Теперь очевидно, что если изменить плотность слоя, не меняя ни его формы, ни силы тяжести, то давление на жидкость под этим слоем останется попрежнему одинаковым во всех точках, хотя по величине оно будет отлично от прежнего. Следовательно, равновесие в планете сохранится, если все слои будут оставлены однородными или же если принять их плотности различными,— однако при условии, чтобы слои более плотные находились всегда под слоями меньшей плотности [32].

§ 69

Итак, если задан закон силы тяжести, и будет поставлена задача определения фигуры, которую должно принять скопление различных жидкостей, вращающихся вокруг оси, то будет достаточно вычислить просто ту фигуру, которая приняла бы та же самая масса, если бы она была совершенно однородной.

Если затем будет желательно определить форму какой-либо поверхности *HKR*, разделяющей две жидкости внутри планеты, то будет достаточно отвлечься от всей массы, лежащей над этой поверхностью, и определить фигуру, которую должна принять жидкая масса *HKR*, рассматриваемая в отдельности.

§ 70

Иначе обстоит дело при предположении, что тяжесть вызывается притяжением материи [[33]]; здесь уже, если планета состоит из различных жидкостей, закон тяжести будет иной, чем для однородной планеты, и поэтому поверхности *PEpe* будут в обоих случаях различны. Кроме того, каждая поверхность *LTG* [фиг. 31] уже не останется неизменной, если снять внешний слой *PEpeLTG*, так как притяжение этого слоя должно входить в выражение тяжести частей массы *LTG*.

§ 71

Впрочем, и в только что сделанном предположении [о тяготении, вызываемом притяжением материи] можно очень просто доказать, что закон тяготения по необходимости должен относиться к числу тех, которые совместны с равновесием жидкостей, даже если бы мы и не знали формы кривой *PEpe*, ни кривых *LTG*, *KQH*, — т. е. не знали бы закона тяготения; иными словами, легко убедиться в том, что масса, состоящая

из различных жидкостей, все части которой вращаются вокруг оси и взаимное притяжение которых выражается какой-либо функцией расстояния, может принять фигуру, которую она сохранит неизменно. Для того чтобы обосновать это, достаточно напомнить сказанное в главе II и применить те же рассуждения, что и в § 67.

§ 72

На основании только что доказанного можно выяснить ошибку некоторых авторов, которые, желая уменьшить величину, получающуюся из теории для экваториального радиуса планеты, предполагают, что столбы жидкости от центра к поверхности тем плотнее, чем они ближе к экватору. Однако из предыдущего ясно, что две жидкости разной плотности не могут находиться рядом друг с другом, но что они должны располагаться так, чтобы более плотная была ближе к центру и чтобы разделяющая их поверхность всегда и во всех точках пересекалась перпендикулярно направлениям тяжести.

Глава XII

Способ применения современных измерений дуги градуса меридиана и длины секундного маятника для определения закона, по которому действует тяготение

§ 73

Получив из наблюдений длину секундного маятника в большом количестве точек на Земле, легко составить таблицу, дающую величину силы тяжести для всех возможных широт. Определив затем фигуру Земли из измерений градуса меридиана на разных широтах, можно вывести, насколько центробежная сила изменила силу притяжения;* таким обра-

* Решение этой задачи, данное г-ном де Мопертюи, см.: „Figuer de la Terre déterminée...“, p. 182.

зом, мы будем знать и величину силы, под действием которой тела падали бы к Земле, если бы она была неподвижна, так и направление этого падения, при том же предположении. Но всего этого еще недостаточно для определения закона притяжения, так как выражение этой силы должно давать ее величину не только на поверхности Земли, но в любой точке внутри и вне Земли.

Но, очевидно, можно найти бесконечное множество выражений для силы притяжения в произвольной точке N, кото-

Фиг. 32.

рые давали бы наблюденные значения этой силы в точке M, если мы приравняем CS и SN соответственно CQ и QM [фиг. 32].

Следовательно, вывод закона притяжения из наблюдений представляет собой задачу неопределенную, даже при условии, что наблюдения совершенно точны. Однако, если мы не в состоянии найти решение, единственность которого можно было бы доказать, как в задачах определенных, то по крайней мере при помощи предыдущей теории мы имеем возможность просмотреть гипотезы, наиболее правдоподобные, которые можно привести в согласие с наблюдениями, и исключить другие, на которых, быть может, мы остановились бы из-за их простоты.

§ 74

Например, *на основании разности в длине меридиана измеренной во Франции и в Лапландии, можно заключить, что сила тяжести не действует по прямой, проведенной к центру Земли.* Действительно, я докажу, что каков бы ни был закон, по которому тела притягивались бы к центру Земли, отношение осей всегда будет равно приблизительно 576:577. Но это значение настолько отличается от отношения 177:178, вытекающего из современных геодезических измерений, что согласовать их с предположением, что сила тяжести направлена к центру, невозможно, если только не допустить в наблюдениях наличия ошибок, гораздо бо́льших, чем те, которые могли бы в них проскользнуть.

Для того чтобы доказать, что *отношение осей не может превысить 576:577, если притяжение во всех точках направлено к центру Земли,* мы воспользуемся результатами § 14: в предположении центрального притяжения жидкость может быть в равновесии только при условии, что притяжение есть функция одного лишь расстояния от центра. При этих условиях пусть будет [фиг. 32] CP — ось, CE — экватор, а KL — кривая, ординаты которой представляют силу тяготения, а абсциссы — расстояния до центра. Если мы возьмем $Cp = CP$, то очевидно, что площадь $EpkK$ будет выражать разность весов столбов CP и CE, предполагая пока, что центробежная сила не действует на столб CE. Если теперь через EF изобразим центробежную силу в точке E, то треугольник EFC будет представлять ту величину, на которую центробежная сила должна уменьшить вес столба CE. Следовательно, для того чтобы имело место равновесие в столбах CE, CP, необходимо, чтобы $EpkK = EFC$; иными словами, вследствие малости EF необходимо, чтобы Ep/EC было очень близко к половине EF/EK; но EF равно приблизительно $1/288\,EK$. Следовательно, и т. д. [34].

§ 75

Предположим теперь, что сила тяжести действует повсеместно отнюдь не по прямым, проходящим через центр, а направлена везде по перпендикуляру к одной и той же кривой; в этом случае из наблюдений можно было бы определить не только форму этой директрисы силы тяжести, но и закон, по которому тела притягивались бы во внутренних точках Земли. Действительно, по фигуре меридиана и из наблюдений тяжести можно было бы вывести направление тяготения в каждой точке поверхности, а отсюда легко найти и кривые, перпендикулярные к этим направлениям. Кроме того, из доказанного в § 35 следует, что сила тяготения может в этом случае зависеть только от расстояния точки от этих кривых. Таким образом, задача была бы определенной.

§ 76

Пример к предыдущему, считая данными отношение осей Земли и изменение силы тяжести, как они получены по наблюдениям во Франции и Лапландии [35].

Предположим, как и в специальных работах, где этот вопрос рассматривается детально, что меридиан PE [фиг. 33] представляет собой эллипс, оси которого относятся как 177 : 178,* и что сила тяжести [вес], действующая в какой-нибудь точке M по перпендикуляру MK к меридиану, уменьшается от P к E пропорционально квадрату косинуса широты; и, наконец, что общее изменение силы тяжести от полюса к экватору достигает 10/2025.**

Я утверждаю, что если построить отрезки KL и CF, положив:

$$KL = \frac{1}{288} QM \quad \text{и} \quad CF = CP\left(1 + \frac{1}{255}\right)$$

то

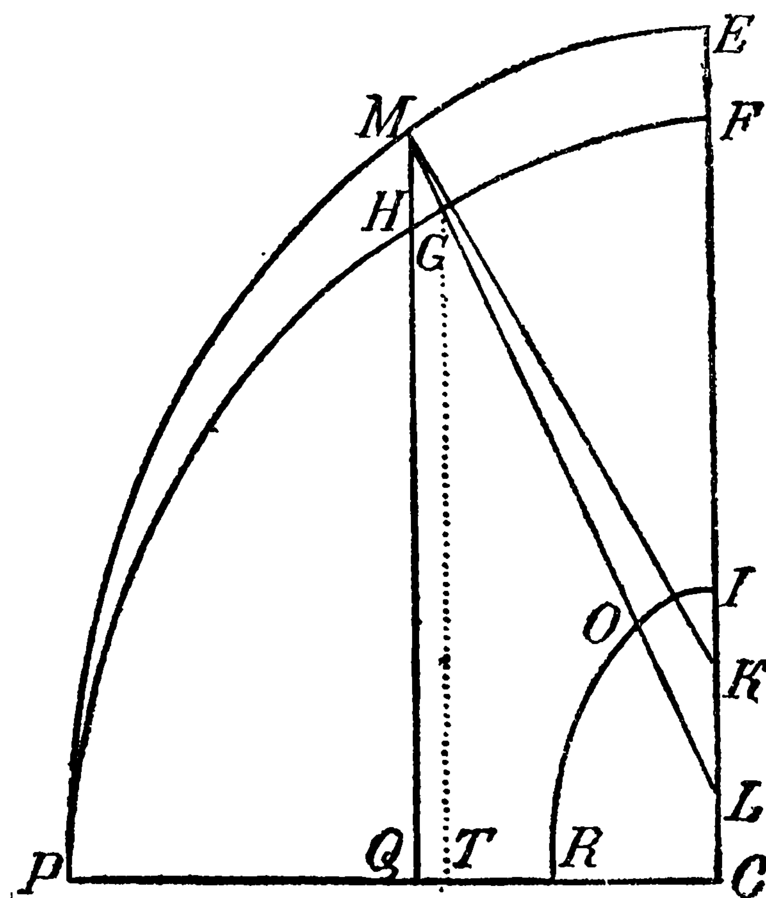
* „Degré du méridien entre Paris et Amiens", p. XVI.

** „Figure de la Terre déterminée...", p. 181.

1) прямая ML будет, без заметной погрешности, определять направление силы тяготения в точке M;

2) эллипс PF и кривые, имеющие с ним одну и ту же эволюту, будут директрисами силы тяготения.

Для доказательства первого из этих положений я замечу, прежде всего, что если KL и MK [фиг. 33] находятся в таком же отношении, как центробежная сила и сила тяжести [т. е. вес] в точке M, то ML должно быть направлением силы тяготения; но если MK выражает силу тяжести в точке M, то ясно, что благодаря малости центробежной силы не будет заметной ошибкой взять за центробежную силу в точке E 288-ю часть CE; откуда KL, т. е. центробежная сила в точке M, будет 288-я часть QM.



Фиг. 33.

Для того чтобы убедиться затем, что кривая PGF, по перпендикулярам к которой направлена везде сила притяжения, очень близка к эллипсу, у которого большая ось CF превышает малую ось CP на $1/255$, заметим следующее: из свойства эллипсов, сходных с PE, т. е. мало отличающихся от круга, следует, что CK относится к QM, как $2(CF-CP)$ относится к CP. При этих условиях вопрос сводится к доказательству, что

$$CL:GT=2(CF-CP):CP=2:255,$$

но по построению $CL=\frac{2}{255}\cdot MQ$ и, следовательно, $CL=\frac{2}{255}\cdot GT$, потому что MQ и GT могут заменять друг друга в этом случае. Следовательно, и т. д.

Пусть теперь RI — кривая, которую мы назвали в § 33 ядром, т. е. последний из всех овалов, имеющих общую эволюту с эллипсом PF. Найдем ту функцию расстояния от этой кривой, которой выражается сила притяжения в любой точке внутри Земли. Мы получим ее из следующих соображений.

Допустим, что P обозначает силу тяжести [т. е. вес] на полюсе; тогда из наблюдений качаний маятника получим, что сила тяжести в точке M есть

$$P\left(1-\frac{10}{2025}\frac{MQ^2}{CP^2}\right)$$

Эта сила действует по направлению MK. Но сила притяжения в точке M относится к силе тяжести в этой же точке, как ML к MK, т. е. как

$$\left(1+\frac{1}{288}\frac{MQ^2}{CP^2}\right):1$$

Следовательно, для силы притяжения в точке M будем иметь выражение:

$$P\left(1-\frac{1}{682}\frac{MQ^2}{CP^2}\right)$$

и останется только по ставить вместо MQ его выражение в функции от MO.

Для того чтобы найти это значение MQ, заметим, во-первых, что OG или равный ему радиус кривизны FI эллипса PF в точке F равен $(1-1/255)\,CP$ и, во-вторых, что

$$MG:EF=MQ^2:CP^2,$$

откуда найдем:

$$MO=CP\left(1-\frac{1}{255}+\frac{1}{576}\frac{MQ^2}{CP^2}\right)$$

Это даст нам:

$$\frac{MQ^2}{CP^2}=\frac{576\cdot MO-574\cdot CP}{CP}$$

отсюда, после подстановки в предыдущее выражение для силы притяжения, получим:

$$P\left(\frac{1256\cdot CP - 576\cdot MO}{682\cdot CP}\right)$$

Таково выражение искомой функции от MO, т. е. от расстояния точки M до ядра RI, которым определяется сила притяжения, в предположении, что она направлена по перпендикулярам MO [к директрисе PGF].

Так как MO очень мало отличается от CP, то легко можно было бы найти и другие функции расстояния MO, которые приводят к такому же значению, как предыдущее выражение, например,

$$\frac{392}{288} + \frac{CP^2}{MO^2}\,.$$

Я не буду останавливаться на исследовании других гипотез относительно притяжения, при которых эта сила не зависит от фигуры Земли [как фигуры равновесия], так как всего сказанного достаточно для того, чтобы во всех случаях решить, согласуется ли принятая гипотеза с наблюдениями и с условиями равновесия жидкостей.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ И ДРУГИХ ПЛАНЕТ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ, ЧТО ВСЕ ИХ ЧАСТИЦЫ ВЗАИМНО ПРИТЯГИВАЮТСЯ С СИЛОЙ, ОБРАТНО ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ КВАДРАТУ РАССТОЯНИЙ



Предисловие

Когда г-н Ньютон ищет отношение осей Земли, он начинает с предположения, что Земля есть эллиптический сфероид. При этом допущении и с помощью некоторых положений, установленных в первой книге его „Principia“, для него не представляет затруднений найти притяжение внутренних частей столба жидкости, идущего от полюса к центру. Применяя те же предложения и делая новое допущение, дозволенное, когда эллипс мало отличается от окружности, он с той же легкостью находит притяжение внутренних частей столба, идущего от экватора к центру. После этого ему остается только приравнять разность веса этих двух столбов сумме центробежных сил в частях, образующих экваториальный столб жидкости, чтобы найти отношение осей, которое он и получает равным 229:230.

Но так как это отношение полностью основано на предположении, что Земля имеет форму эллиптического сфероида, то принять его можно, только установив, что это предположение соответствует действительности, или, по крайней мере, убедившись в том, что оно вызовет в данном случае ничтожную ошибку. Между тем, г-н Ньютон не только не доказал, что Земля — эллиптический сфероид или близка к нему, но он даже и не утверждал этого. Повидимому, он считал, что так как Земля не отличается заметно от сферы, то безразлично, считать ли меридиан эллипсом или какой-либо другой

кривой, мало отличающейся от круга. Однако такое допущение произвольно.

Как бы то ни было, поскольку г-н Ньютон не доказал этого положения, то я пытался найти способ установить, является ли оно в действительности истинным, и это мне удалось;* отсюда следует, что величина осей и длина маятников, отбивающих секунды на экваторе и на полюсе, определенные в труде г-на Ньютона, правильны, если предположить вместе с ним, что сфероид однороден.

Но так как длина маятника и отношение осей, найденные г-ном Ньютоном, не согласуются с наблюдениями, произведенными нами в Лапландии, я отказался от предположения об однородности Земли и поставил перед собой задачу определить ее фигуру, допуская, что Земля состоит из бесконечного числа слоев, плотности которых изменяются по произвольному закону от центра к поверхности.

В Philosophical Transactions за 1738 г.** я дал решение этой задачи, предполагая, что все слои ограничены подобными друг другу кривыми, и я доказал, что они и в этом случае должны быть эллипсами. С тех пор, исследовав более глубоко принципы гидростатики, на которых основано мое решение, я убедился, что оно может быть правильным только если предположить, что внутренние части Земли были первоначально твердыми: условия равновесия планет, состоящих из различных жидкостей, не допускают, чтобы слои или, лучше сказать, чтобы кривые, отделяющие различные жидкости, были подобными кривыми. Тогда я начал выяснять, какую форму следовало бы придать этим слоям, и нашел, что это снова должны быть эллипсы; однако с той разницей, что вместо того, чтобы быть подобными, они должны быть тем более сжатыми, чем более они удалены от центра; при этом

* Мое доказательство было дано в 1737 г. в Philosophical Transactions.

** Philosophical Transactions, vol. XL (publ. 1741), p. 19—25 (*Ред.*).

величина сжатия подчиняется закону, выражение которого зависит от уменьшения плотности от центра к поверхности.

Для того чтобы придать моей теории бо́льшую общность, я не ограничился одним предположением, что внутренние части Земли были вначале жидкими и что они расположились по законам гидростатики; я допускал также, что они всегда были твердыми, сколь угодно удлиненными или сжатыми, и я определил фигуру поверхности планеты во всех этих предположениях. При этом исследовании мне понадобились решения некоторых задач, которые были даны в моем мемуаре в Philosophical Transactions; поэтому они встретятся и здесь, но изложенные в более ясной и общей форме.

Если я пытался определить фигуру Земли при столь разнообразных предположениях относительно плотности, то это не только потому, что я имел в виду сопоставить теорию притяжения с нашими измерениями на севере. Я хотел найти при этом доказательство одного утверждения в „Principia Mathematica Philosophiae Naturalis“, где г-н Ньютон заключает, на основании наблюдений в Горэ́, в Гваделупе и т. д., что Земля должна быть более сжатой, чем если бы она была однородной. Однако при всех моих попытках я не мог прийти к согласию с ним в этом вопросе. Напротив, я нашел как раз обратное тому, что утверждает этот знаменитый автор, а именно что Земля должна быть тем менее сжатой, чем более значительным получается укорочение длины секундного маятника от полюса к экватору.

Хотя содержанием второй части моей книги является определение фигуры планет, когда части их обладают различной плотностью, так что случай однородности получается отсюда путем простой подстановки, тем не менее, я считаю уместным исследовать отдельно фигуру однородного сфероида, отказавшись при этом от моего способа и следуя тому методу, который г-н Маклорен применил недавно в его прекрасном „Трактате о флюксиях“. Этот метод, по-моему,

столь красив и глубок, что, как мне казалось, я доставлю удовольствие моим читателям, изложив его здесь.

Я не вполне следовал за г-ном Маклореном при доказательстве его предложений и при определении [отношения] осей Земли, так как в некоторых местах теория равновесия жидкостей, развитая мною, устраняет необходимость доказательства нескольких лемм, которые ему пришлось вывести; а в других случаях я полагал, что анализ окажется более ясным, чем синтез [36].

Глава I

О фигуре планет в предположении однородности их частей

§ 1

Пусть $aMAN$ и $HSRQ$ [фиг. 34] — два подобных эллипса, C — их центр, Aa и QH — их большие или [безразлично] их малые оси, MQN — перпендикуляр к оси Aa, QR — прямая, образующая с QH произвольный угол, NK — прямая, ей параллельная, и NL — другая прямая, образующая с NZ — продолжением QN — угол LNZ, равный углу KNY; требуется доказать, что

$$KN+NL=2\cdot QR$$

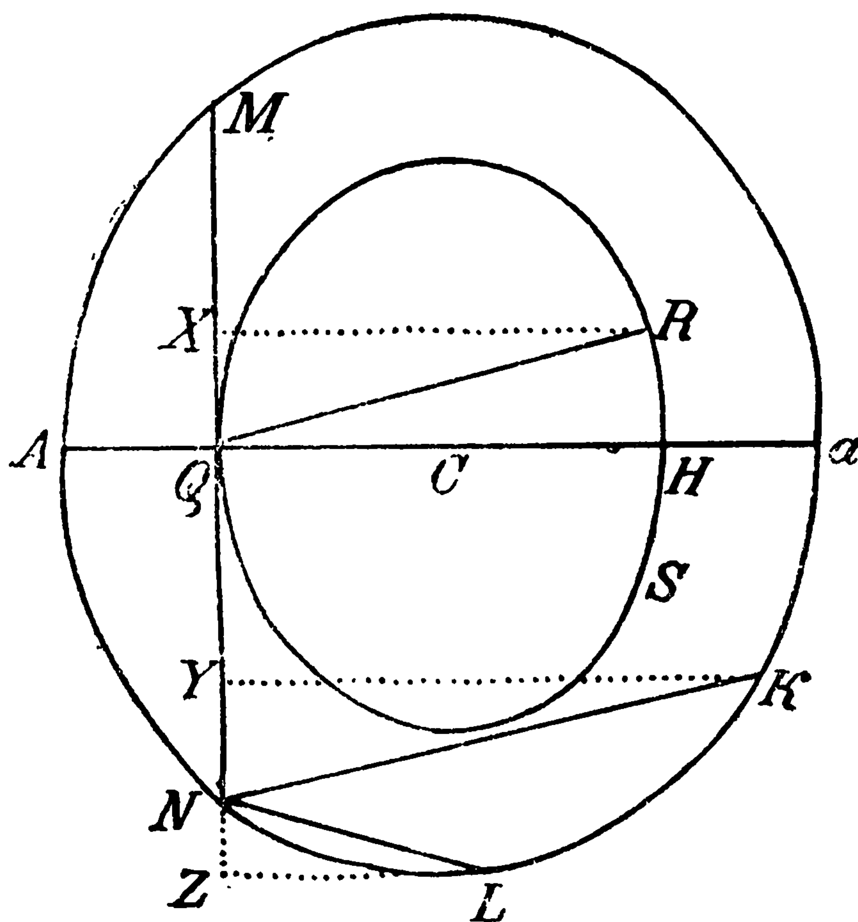
Предположим, что вся фигура ортогонально спроектирована на произвольную плоскость; очевидно, что в новой фигуре сумма прямых, соответствующих KN и NL, должна равняться удвоенной прямой, соответствующей QR. Пусть теперь плоскость, на которую мы проектируем, наклонена под таким углом, что эллипсы $AMaN$, QRS обращаются в круги; задача сводится к доказательству, что для круга $KN+LN=2\cdot QR$.

Но это настолько легко доказать с помощью элементарной геометрии, что мы на этом останавливаться не будем.

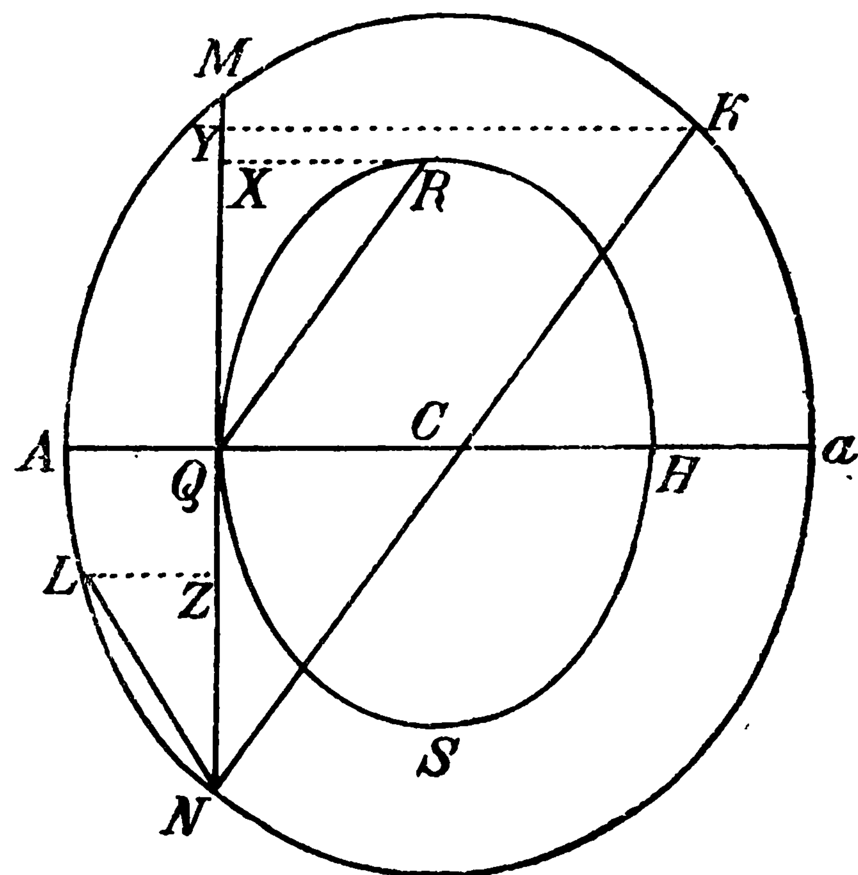
§ 2

Если мы опустим из точек R, K, L перпендикуляры RX, KY, LZ, то будем иметь

$$KY + LZ = 2 \cdot RX$$



Фиг. 34.



Фиг. 35.

§ 3

Очевидно, что если угол RQH таков, что точка L попадет между точками A и N [фиг. 35], то

$$KN - NL = 2 \cdot QR$$

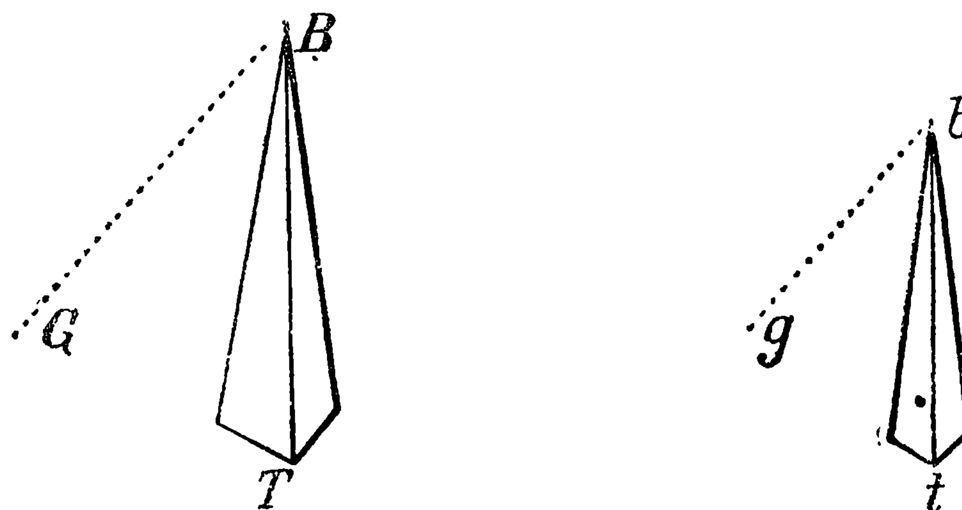
и отсюда

$$KY - ZL = 2 \cdot RX$$

§ 4

Положим, что BT и bt [фиг. 36] — две произвольные подобные пирамиды и что все их частицы действуют с силой

притяжения, обратно пропорциональной квадрату расстояний; тогда частицы, помещенные в B и b, будут притягиваться силами, пропорциональными подобным размерам [ребрам] этих пирамид BT и bt. Кроме того, если линии BG и bg подобно



Фиг. 36.

расположены по отношению к этим пирамидам, то *составляющие сил притяжения по этим направлениям будут также находиться в отношении BT и bt* [37].

§ 5

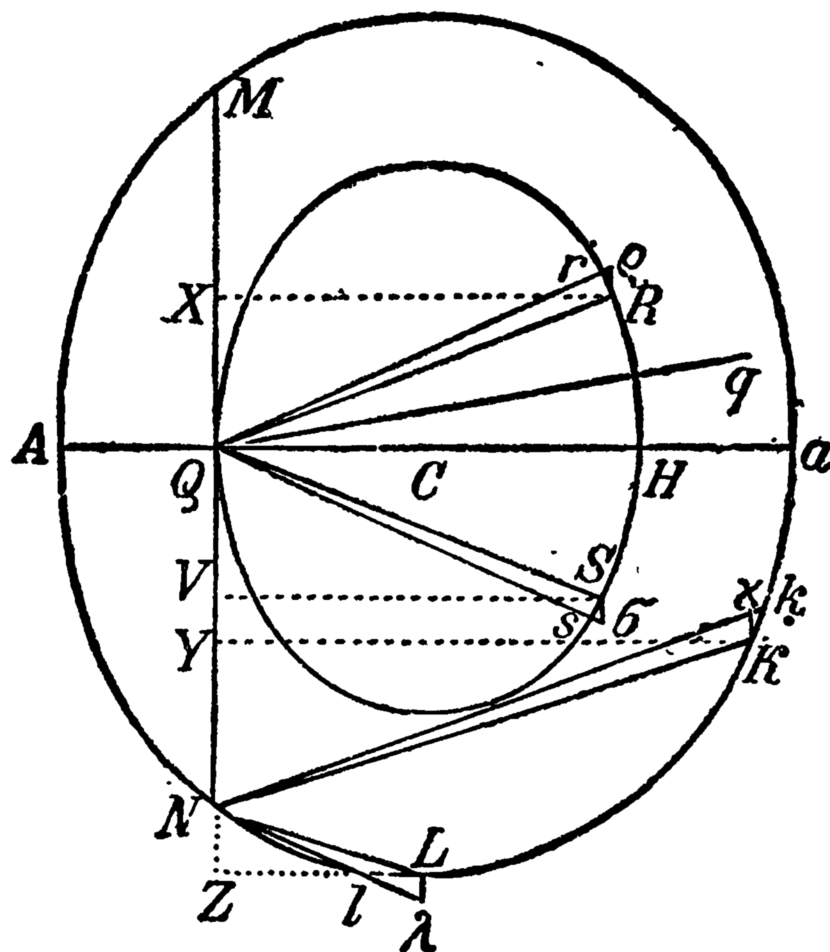
Если, сохраняя условия § 1, мы вообразим, что плоскость $MANa$ [фиг. 37] повернулась на бесконечно малый угол вокруг оси MN, то два бесконечно тонких тела, образованные при вращении эллипсов $AMaN$ и $QRHS$, будут действовать одинаковым притяжением в направлении Qa: первое — на частицу, помещенную в N, а второе — на частицу, помещенную в Q.

Проведем QS, равную QR, и, следовательно, параллельно NL; будем считать, что прямые sQ, rQ, kN, lN бесконечно близки к первым прямым SQ, RQ, KN и LN и проведены при тех же условиях [равенства углов]; проведем далее через точки R, S, K, L прямые $R\rho$, $S\sigma$, $K\chi$, $L\lambda$ перпендикулярно оси Aa до пересечения с прямыми Qr, Qs, Nk и Nl.

Заметим, что малые отрезки $R\rho$, $S\sigma$, $K\chi$, $L\lambda$ пропорциональны прямым QR, QS, NK и NL.

Далее, мы видим, что бесконечно малые отрезки или дуги, описанные точками R, S, K, L при бесконечно малом повороте плоскости $AMaN$ вокруг MQN, должны быть пропорциональны радиусам RX, SV, KY, LZ; поэтому маленькие пирамиды, описанные треугольниками $QR\rho$, $SQ\sigma$, $KN\chi$, $LN\lambda$, будут подобны.

Отсюда и на основании § 4 выводим, что составляющие притяжения всех пирамид в направлении Qa на частицы N и Q будут пропорциональны тем же линиям RX, SV, KY, LZ. Но мы видели в § 2, что $SV+RX$, или, что то же самое, $2\cdot SV=KY+LZ$; поэтому притяжение обеих пирамид $RQ\rho$ и $SQ\sigma$ в направлении Aa и притяжение обеих пирамид $KN\chi$ и $LN\lambda$ в том же направлении будут между собой равны. Следовательно, два бесконечно тонких тела, образованные движением двух эллиптических секторов RQS и KNL, будут действовать на частицы Q и N с одинаковой силой в направлении Qa.



Фиг. 37.

Очевидно, что это рассуждение будет иметь место, пока прямые KN и NL, параллельные QR и QS, лежат в одном и том же сегменте. Но лишь только наклон прямых QR и QS будет такой, что линия NL перейдет в сегмент MNA, придется применить соотношение, данное в § 3; в этом случае разность притяжения пирамид, из которых состоит тело, образованное вращением MAN, и соответствующих им пирамид, составляющих тело, полученное вращением MaN, снова

будет равна притяжению тех пирамид, из которых составится тело, образованное вращением эллипса RQS; следовательно, общее притяжение тел, образованных обоими этими полными эллипсами, на частицы N и Q по направлению Qa, будет одинаково.

§ 6

Вообразим произвольную прямую Qq, проходящую через точку Q и лежащую в плоскости, проведенной через Aa перпендикулярно к плоскости AMa; очевидно, что притяжения на частицу Q по направлению Qq и на частицу N по направлению, параллельному Qq, будут равны.

§ 7

Пусть $PEpe$ и $QFqf$ [фиг. 38] — два подобных эллиптических сфероида, C — их центр, Pp и Qq — их оси вращения. Если через точку Q проведем перпендикуляр MQm к Pp и возьмем составляющую по направлению Pp той силы, с которой частица M или m притягивается сфероидом $PMEpm$, то эта составляющая будет равна силе, с которой сфероид $QFqf$ притягивает частицу, помещенную в Q.*

Если через прямую MQm проведем произвольную плоскость, то по свойству конических сечений два эллипса, полученные в сечении обоих сфероидов, будут подобны.

Следовательно, если мы проведем бесчисленное множество различных плоскостей через MQm, то оба сфероида будут разделены на бесконечное множество элементов, которые будут соответствовать тем [бесконечно тонким] телам, которые мы рассматривали в §§ 5 и 6. Таким образом, притяжение частицы Q каждым элементом эллипсоида $QFqf$ в направлении Qq будет равно притяжению соответствующего

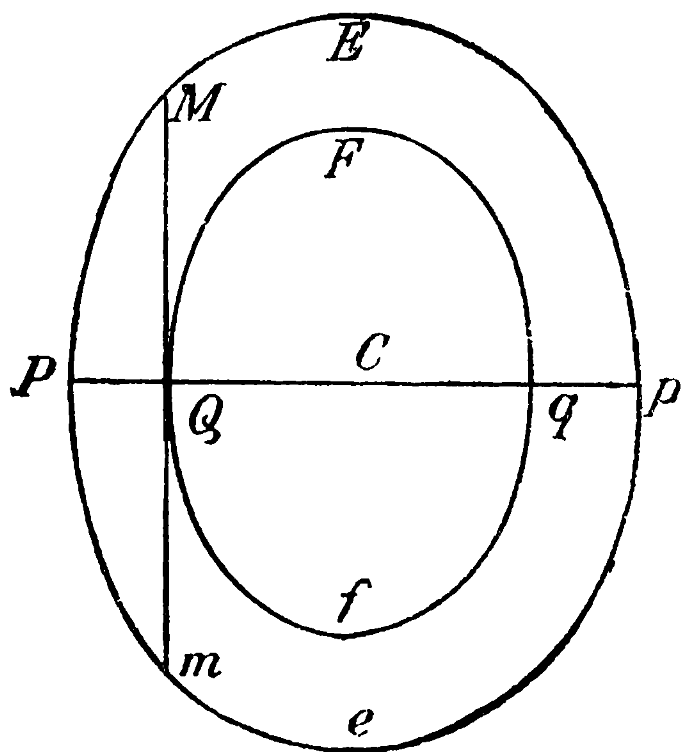
* Эллипсоида вращения (*Ред.*).

элемента эллипсоида *PMEpem* на частицу *M* или *m* по прямой, параллельной *Qq*. Следовательно, общая сумма притяжений всех элементов или притяжения обоих сфероидов будут равны.

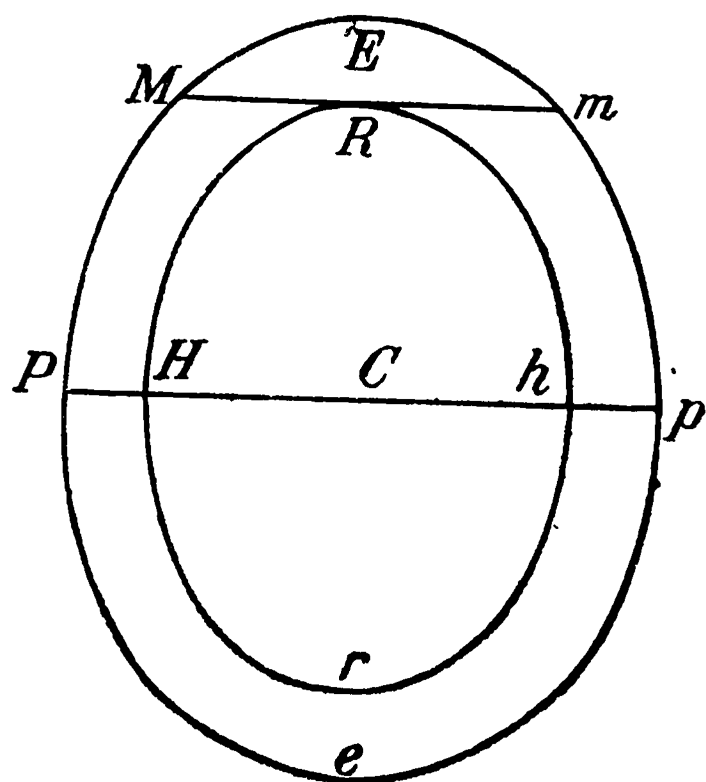
§ 8

Пусть даны снова два подобных сфероида PEpe и HRhr [фиг. 39]; если проведем теперь через R прямую MRm, параллельную оси, то притяжение эллипсоидом pEPe частицы в точке M или m в направлении, перпендикулярном к Pp, будет равно притяжению сфероидом RHrh частицы, помещенной в R.

Разделив оба сфероида на бесконечное множество элементов плоскостями, проходящими через *MRm*, мы увидим опять,



Фиг. 38.



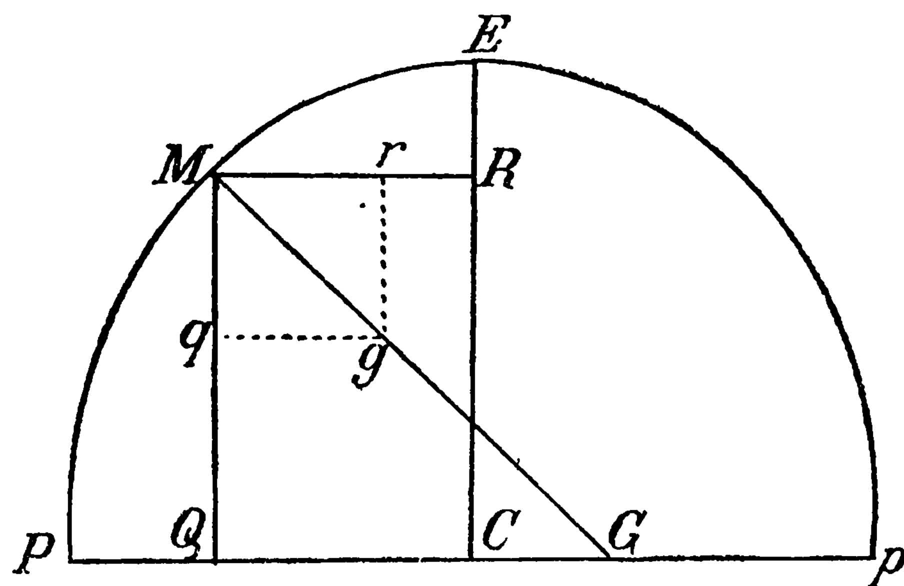
Фиг. 39.

что все слои будут телами, подобными тем, о которых шла речь в § 5. Следовательно, их притяжения по направлению *Rr* будут равны; поэтому будут равны и притяжения обоих сфероидов [на *M* и на *R*].

§ 9

Однородная масса жидкости, вращающаяся вокруг оси, должна принять форму эллиптического сфероида, с тем чтобы все ее части пришли в равновесие.

Вообразим произвольный сфероид PEp с осью вращения Pp [фиг. 40]. Вопрос сводится к доказательству, что этот сфероид может вращаться вокруг оси с такой угловой скоростью, что центробежная сила любой частицы M на его поверхности, в соединении с притяжением сфероида на ту же



Фиг. 40.

частицу, даст силу Mg, направленную по перпендикуляру к эллипсу в точке M. Мы видели, действительно (часть первая, § 12), что если это условие соблюдено, то все части сфероида должны быть в равновесии.

Обозначим здесь через

E — притяжение на экваторе

F — центробежную силу в точке экватора

P — притяжение на полюсе.

Согласно § 7, составляющая притяжения на точку M по направлению MR будет та же, что на полюсе Q у сфероида, подобного PME, с полуосью QC. Следовательно [и по условию подобия сфероидов], $\mathrm{P} \cdot \frac{CQ}{CP}$ будет равно силе Mr, которая действует на M параллельно оси Pp.

Далее, по § 8, притяжение в этой же точке M по направлению MQ будет равно притяжению на экваторе R того сфероида, у которого CR есть экваториальный полудиаметр. Следовательно:

$$E \cdot \frac{CR}{CE} \text{ или } E \cdot \frac{MQ}{CE}$$

будет притяжение на точку M по направлению MQ.

Но $F \cdot \frac{MQ}{CE}$ есть центробежная сила в точке M.

Значит

$$(E - F) \frac{MQ}{CE}$$

будет полной силой Mq, действующей на M в направлении, перпендикулярном к оси.

Теперь остается убедиться в том, что в какую бы точку эллипса PME ни поместить частицу M, нормаль MG является всегда продолжением Mg, т. е. диагонали прямоугольника $Mqgr$; иными словами, что всегда должно быть

$$\frac{Mr}{Mq} = \frac{QG}{MQ}$$

или

$$P \cdot \frac{CQ}{CP} : \frac{MQ}{CE}(E - F) = \frac{CE^2}{CP^2} \cdot CQ : MQ.$$

По сокращении получаем пропорцию:

$$\frac{E - F}{P} = \frac{CP}{CE}$$

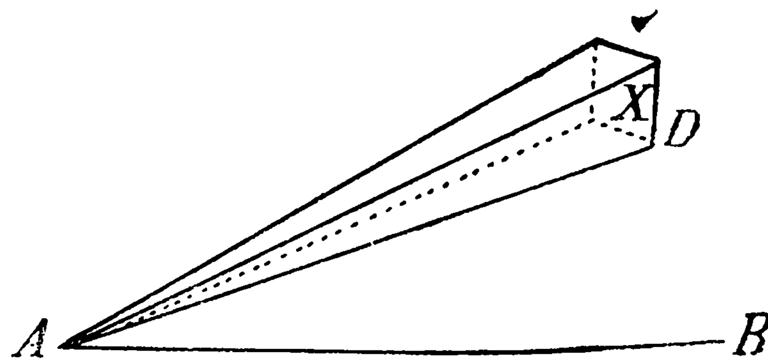
в нее не входит ни одна длина, определяющая положение точки M. Следовательно, *сфероид будет в равновесии, если только вращение происходит с угловой скоростью, которая необходима для того, чтобы возникла такая центробежная сила* F, *которую требует уравнение* [38]:

$$(E - F) \cdot CE = CP \cdot P$$

§ 10

Пусть AX [фиг. 41] — пирамида, бесконечно малое основание которой X перпендикулярно стороне AD. Притяжение этой пирамидой частицы A по заданному направлению AB равно [37]:

$$\frac{X}{AD}\cos(DAB)$$

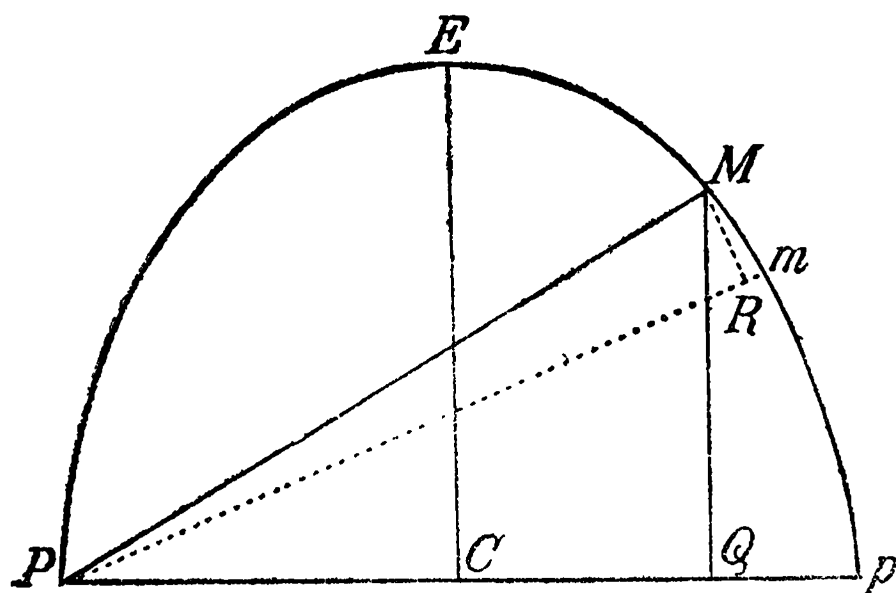


Фиг. 41.

§ 11

Найти притяжение сжатого сфероида PEp на частицу, помещенную в полюсе P

Положим, что M и m — две произвольные, бесконечно близкие точки на одном из меридианов сфероида, а MR — пер-



Фиг. 42.

пендикуляр, опущенный из M на Pm [фиг. 42]. Если повернуть плоскость PEp на бесконечно малый угол вокруг оси Pp,

то очевидно, что PMR образует при этом движении бесконечно малую пирамиду, которая может быть принята за один из произвольных элементов твердого тела, образованного вращением эллипса PEp.

Положим теперь:

Малая полуось	$PC=1$
Большая полуось	$CE=m$
Бесконечно малый угол вращения плоскости PEp	$=\alpha$
Абсцисса	$PQ=z$
Ордината	$QM=u$
Косинус угла MPQ	$=s$

Обозначим еще:

$$\sqrt{m^2-1}=l$$

тогда $u\alpha$ представит собой длину бесконечно малой прямой, описанной точкой M при бесконечно малом повороте плоскости $PEMp$ вокруг оси Pp; поэтому $u\alpha\cdot MR$ есть основание пирамиды, образованной треугольником PMR.

Следовательно, на основании предыдущего параграфа для выражения притяжения этой пирамидой частицы P по направлению Pp будем иметь

$$\alpha u \frac{MR}{PM} s \quad \text{или} \quad \frac{\alpha us\, ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

По свойству эллипса [39]

$$2m^2z - m^2z^2 = u^2$$

а так как $\cos MPQ = \frac{PQ}{PM}$ (при радиусе 1),

то

$$s = \frac{z}{\sqrt{z^2+u^2}}$$

Из этих двух уравнений мы найдем u как функцию от s; подставляя это значение в дифференциал, получим выражение:

$$\frac{2\alpha\, m^2\, s^2\, ds}{1 + l^2 s^2}$$

Интеграл от этого дифференциала представляет собой силу, с которой гело, образованное бесконечно малым перемещением площади PEM, притягивает частицу P по направлению Pp. Для интегрирования этого выражения я перепишу его в виде

$$\frac{2\alpha\, m^2}{l^3}\left(l - \frac{l}{1 + l^2 s^2}\right) ds$$

Интеграл его равен

$$\frac{2\alpha m^2}{l^3}\left(ls - \operatorname{arc\,tg} ls\right)$$

Полагая затем в этом выражении $s = 1$ и вводя $m^2 = 1^2 + l^2$, я получаю

$$\frac{2\alpha(1 + l^2)}{l^3}(l - \operatorname{arc\,tg} l)$$

Такова величина силы, с которой все тело, образованное вращением эллипса PEp вокруг оси Pp, притягивает частицу P; это и есть притяжение бесконечно тонкого отсека сфероида, заключенного между меридианами. Но так как весь сфероид составлен из такого числа отсеков, равных и подобных только что рассмотренному, сколько раз α содержится в окружности, остается только заменить α на 2π в предыдущем выражении, и мы получаем:

$$P = \frac{4\pi(1 + l^2)}{l^3}(l - \operatorname{arc\,tg} l)$$

Это и есть выражение для притяжения сфероидом частицы, помещенной в его полюсе.

§ 12

Для того чтобы применить это выражение, мы воспользуемся рядом, дающим дугу через ее тангенс, именно:

$$\operatorname{arc\,tg} l = l - \frac{1}{3}\,l^3 + \frac{1}{5}\,l^5 - \frac{1}{7}\,l^7 \ldots\ldots$$

Полагая затем [40]

$$m = 1 + \delta \text{ и } l^2 = 2\delta + \delta^2$$

найдем:

$$P = \frac{4\pi}{3}\left(1 + \frac{4}{5}\,\delta - \frac{2}{7}\,\delta^2 + \frac{8}{105}\,\delta^3 \ldots\right).$$

Этот ряд бесполезно продолжать дальше, если ось вращения мало отличается от диаметра экватора.

§ 13

Если в этом выражении мы предположим $\delta = 0$, то получим $\frac{4\pi}{3}$ для величины *притяжения, с которым сфера радиуса 1 действует на частицу, находящуюся на ее поверхности.*

§ 14

Найти притяжение сфероида *PEpe* на частицу, помещенную в любой точке *E* его экватора

Проведя произвольную плоскость через прямую *EK*, параллельную *CP* [фиг. 43], найдем, что кривая, получающаяся при пересечении сфероида этой плоскостью, есть эллипс, подобный эллипсу *PEpe*. Вообразим сферу, построенную на *EH*, равной *Pp*, и предположим, что эта сфера, так же как и сфероид, разделены при помощи плоскости, вращающейся вокруг *EK*, на бесконечное множество элементов; после этого, очевидно, достаточно найти отношение между притяжением элемента

сферы и соответствующим элементом сфероида, чтобы получить отношение притяжения сферы к притяжению сфероида.

Заметив это, примем за элементы сферы и сфероида те, которые получаются между плоскостью $PEpe$ и плоскостью, образующей с ней бесконечно малый угол; тогда задача сводится к определению притяжения частицы E телом, образованным вращением эллипса $PEpe$ на бесконечно малый угол вокруг прямой EK.

Фиг. 43.

Для решения проведем две произвольные бесконечно близкие прямые EN и En, опустим перпендикуляр NK на EK и проведем NL перпендикулярно NE. Далее положим:

$$EC = m, \quad CP = 1, \quad m^2 = 1 + l^2$$

$$NK = z, \quad EK = u$$

Бесконечно малый угол между двумя плоскостями, образующими элемент объема, притяжение которого мы определяем, обозначим α, синус угла NEC через s.

Таким образом, длина бесконечно малой прямой, описанной точкой N, при вращении эллипса $EPep$ вокруг EK будет равна αz. Следовательно, площадь основания бесконечно малой пирамиды, описанной движением треугольника ENL, равна $\alpha z \cdot LN$. Отсюда, согласно § 10, притяжение этой пирамидой частицы E по направлению Ee, или, что то же самое, притяжение пирамиды, образованной вращением ENn, равно

$$\alpha z \cdot \frac{LN}{EN} \cdot \sqrt{1-s^2}$$

что приводится к

$$\alpha z \, ds$$

По свойству эллипса получаем [41]:

$$u^2 = \frac{2mz - z^2}{m^2}$$

а так как

$$\sin NEC = \frac{EK}{NE}$$

то

$$s = \frac{u}{\sqrt{u^2 + z^2}}$$

Из этих двух уравнений найдем z как функцию от s, и после подстановки в предыдущий дифференциал получим:

$$\frac{2m\alpha(1 - s^2)\,ds}{1 + l^2 s^2}$$

Интеграл этого выражения представляет притяжение тела, образованного вращением сектора NEe на частицу E, по направлению Ee.

Для интегрирования представим это выражение в виде:

$$2\alpha\left(\frac{m^3}{l^3} \cdot \frac{l}{1 + l^2 s^2} - \frac{m}{l^2}\right) ds$$

Его интеграл, равный

$$2\alpha\left(\frac{m^3}{l^3}\operatorname{arc\,tg} ls - \frac{ms}{l^2}\right)$$

при $s = 1$ превращается в

$$2\alpha\left(\frac{m^3}{l^3}\operatorname{arc\,tg} l - \frac{m}{l^2}\right)$$

он выражает притяжение [частицы E] телом, образованным бесконечно малым вращением полуэллипса $PEpe$ вокруг EK.

Если мы вернемся затем к дифференциалу

$$\frac{2m\alpha(1 - s^2)\,ds}{1 + l^2 s^2}$$

и положим в нем $m=1$, $l=0$, то получим выражение

$$2\alpha(1-s^2)\,ds$$

интеграл которого, т. е.

$$2\alpha\left(s-\frac{s^3}{3}\right)$$

превращается в $\frac{4\alpha}{3}$ при $s=1$. Очевидно, этот интеграл выражает притяжение тела, образованного вращением вокруг EK полуокружности, описанной на EH.

Следовательно, отношение

$$\frac{4}{3}\alpha : 2\alpha\left(\frac{m^3}{l^3}\operatorname{arc\,tg} l-\frac{m}{l^2}\right)$$

или, что то же самое, отношение

$$1 : \frac{3}{2}\left(\frac{m^3}{l^3}\operatorname{arc\,tg} l-\frac{m}{l^2}\right)$$

и является искомым отношением между притяжением элементов сферы и сфероида, а вместе с тем и отношением между притяжениями частицы на экваторе этими двумя телами в их целом. Но $4\pi/3$ выражает притяжение сферы (§ 13); следовательно, умножая предыдущее отношение на $4\pi/3$, получим:

$$2\pi\left(\frac{m^3}{l^3}\operatorname{arc\,tg} l-\frac{m}{l^2}\right)$$

или, вводя

$$m^2=1+l^2$$

$$\mathrm{E}=\frac{2\pi(1+l^2)^{3/2}}{l^3}\left(\operatorname{arc\,tg} l-\frac{l}{1+l^2}\right)$$

Это и есть *величина притяжения сфероидом частицы на его экваторе*, обозначенная здесь через E [42].

§ 15

Если, как в § 12, подставим вместо $\operatorname{arc\,tg} l$ его разложение в ряд и положим

$$m=1+\delta$$

то найдем:

$$E = \frac{4\pi}{3}\left(1 + \frac{3}{5}\delta - \frac{9}{35}\delta^2 + \frac{11}{105}\delta^3 + \ldots\right)$$

§ 16

Если предположить, что сфероид, о котором здесь идет речь, жидкий и что он вращается вокруг своей оси в течение промежутка времени, необходимого для того, чтобы он был в равновесии, то, на основании §§ 9, 12 и 15, легко получим выражение центробежной силы на экваторе; по § 9 мы имеем:

$$\frac{P}{E - F} = 1 + \delta$$

откуда

$$F = E - \frac{P}{1 + \delta}$$

Подставляя вместо E и P их значения, найдем:

$$F = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{4}{5}\delta - \frac{6}{35}\delta^2 - \frac{2}{35}\delta^3 + \ldots\right)$$

§ 17

Зная отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе и предполагая, что сфероид находится в равновесии, найти отношение его осей

Обозначим через φ отношение центробежной силы на экваторе к силе тяжести там же; величина этого отношения дается наблюдениями; мы имеем:

$$\varphi = \frac{F}{E - F}$$

Подставляя сюда вместо E и F их значения, получаем:

$$\varphi = \frac{4}{5}\delta - \frac{2}{175}\delta^2 + \frac{8}{875}\delta^3 + \ldots$$

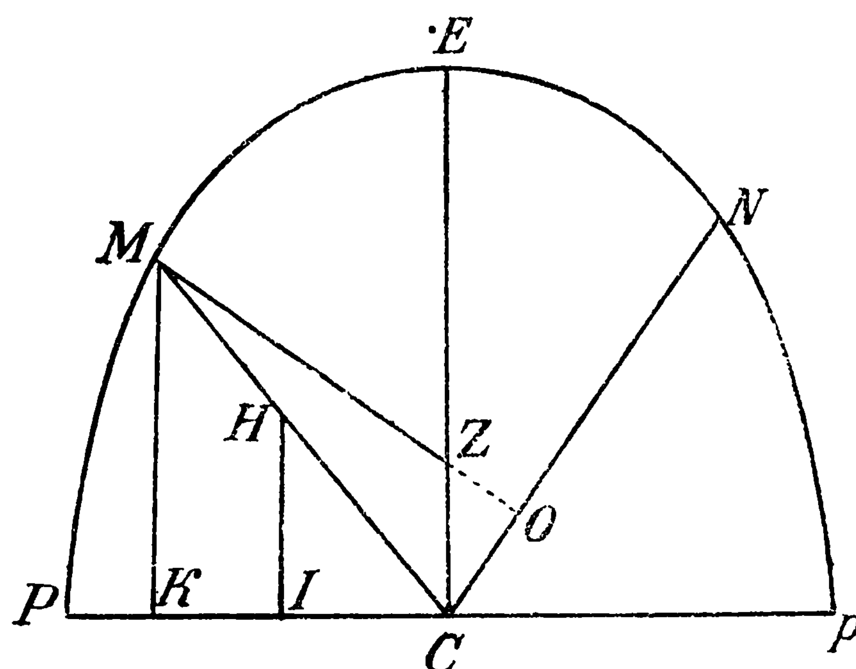
откуда выводим значение m, т. е. отношение осей:

$$m = 1 + \delta = 1 + \frac{5}{4}\varphi + \frac{5}{224}\varphi^2 - \frac{135}{6272}\varphi^3 + \dots \quad [^{43}]$$

§ 18

На однородном сфероиде, находящемся в равновесии, сила тяжести в любой точке M на поверхности пропорциональна длине нормали MZ.

По предложению XCI „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (следствие третье), притяжение, которое действует на частицу, помещенную в точке M, в направлении



Фиг. 44.

MC, относится к притяжению, действующему в том же направлении на частицу H, как CM к CH [фиг. 44]. Сверх того, и составляющая центробежной силы в точке M по направлению CM относится к составляющей центробежной силы в точке H по тому же направлению так же, как CM к CH.

Следовательно, силы, создающие вес частиц M и H по направлению к C, относятся, как CM к CH. Но так как сфероид находится в равновесии, то вес столба должен быть один и тот же, где бы точка M ни находилась. Следова-

тельно, тяжесть точки M в направлении к точке C должна быть обратно пропорциональна расстоянию MC [44].

Если мы заметим теперь, что тяжесть в M направлена по нормали MZ в точке M и что сила, с которой частица M притягивается к C, есть не что иное, как составляющая тяжести по направлению MC, то убедимся, что тяжесть будет обратно пропорциональна MO; но так как CO есть перпендикуляр, опущенный из C на продолжение MZ, то NOC есть диаметр, сопряженный с CM. Но из свойств конических сечений известно, что сопряженный диаметр CN пропорционален нормали MZ и что произведение $MO \cdot CN$, т. е. параллелограмм, построенный на сопряженных диаметрах, имеет постоянную величину. Следовательно, MZ обратно пропорционально MO, а тяжесть в точке M пропорциональна MZ.

§ 19

Отсюда следует, что если мы обозначим [геоцентрическую] широту в точке M через θ, тяжесть на экваторе через p и предположим, как в § 12, что сфероид весьма мало отличается от сферы, то выражение для тяжести в любой точке M будет:

$$p(1 + \delta \sin^2 \theta)$$

откуда видно, что *приращение тяжести от экватора к полюсу пропорционально квадрату синуса широты* или, что то же самое, что *уменьшение тяжести от полюса к экватору пропорционально квадрату косинуса широты* [45].

§ 20

Определение отношения осей однородной Земли

Предполагая сначала вместе со всеми авторами, писавшими о фигуре Земли, что центробежная сила на экваторе составляет 289-ю часть силы притяжения, получаю, что φ, т. е.

отношение центробежной силы к силе тяжести, равно 1/288. Подставляя затем это значение в два первых члена

$$\frac{5}{4}\varphi + \frac{5}{224}\varphi^2$$

выражения δ, нахожу:

$$\delta = \frac{10}{2304}\left(1 + \frac{1}{16100}\right)$$

отсюда видно, что, взяв только первый член $\frac{5}{4}\varphi$, можно определить отношение осей с точностью порядка $\frac{1}{16000}$; поэтому, если мы уверены, что не сделали ошибки большей, чем эта, в определении отношения центробежной силы к силе притяжения, то бесполезно вводить следующие члены уравнения $\delta = \frac{5}{4}\varphi + \ldots$ и т. д. Поэтому, если требуется какая-либо поправка к значению $\frac{10}{2304}$, которое мы только что нашли для δ, то эта поправка должна определяться изменением величины отношения центробежной силы к силе притяжения. Для того чтобы получить это отношение как можно точнее, я пользуюсь следующими данными:

1) длиной секундного маятника в Париже; я принимаю ее равной $440\,^{17}/_{30}$ линии, как это следует из наблюдений г-на де Мэрана; это дает 2174.11 линии для высоты падения в первую секунду под действием силы тяжести на широте Парижа;

2) длиной градуса меридиана в Лапландии, измеренной г-ми де Мопертюи, Камю, Лемонньe и мной; она была найдена равной 57438 туазам на широте 66°20′.

Вот как я использую эти данные.

Сохраняя те же обозначения, что и в § 19, и называя еще ε — высоту падения в первую секунду на широте θ, я нахожу по § 19, что

$$\varepsilon(1 - \delta\sin^2\theta)$$

есть высота падения в первую секунду на экваторе. Подставляя сюда найденное выше значение $\delta = 1:230$, вместо θ широту Парижа $48°50'$ и $\varepsilon = 2174.11$ линии, нахожу:

$$\varepsilon\left(1 - \frac{1}{460}\right) = 2168.75 \text{ линии.}$$

Такова высота падения в первую секунду на экваторе.

Далее я нахожу, чему равна длина D_0 одного градуса дуги окружности, радиус которой равен радиусу экватора; пусть D — длина градуса меридиана сфероида на широте θ; если полуоси его относятся, как $1:(1+\delta)$, я получаю, что

$$D_0 = D\,(1 - 3\delta \sin^2\theta + 2\delta)$$

Подставляя в это выражение:

$$\delta = \frac{1}{230}; \quad D = 57438 \text{ туазам}; \quad \theta = 66°20'$$

нахожу, что

$$D_0 = 57309 \text{ туазам.}$$

Отсюда синус-верзус той дуги, которую в течение одной секунды описывают тела, находящиеся на экваторе, получается равным 7.54287 линии.

Но мы только что видели, что высота падения тел на экваторе, под действием силы тяжести, в первую секунду равна 2168.75 линии; поэтому отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе равно

$$\varphi = \frac{7.54287}{2168.75} = \frac{100}{28752}$$

Подставив это значение φ в выражение для δ (стр. 122), получаю, наконец:

$$\delta = \frac{1000}{230002}$$

таким образом, отношение осей Земли без ощутимой погрешности равно 230 к 231, в предположении, что Земля однородна [46].

§ 21

Отсюда и из § 9 следует, что, *в предположении однородной Земли, действие тяжести должно быть меньше на экваторе, чем на полюсе, в том же отношении 230 к 231.*

§ 22

Определение отношения осей Юпитера

Для того чтобы определить центробежную силу и силу тяжести на экваторе Юпитера, надо знать время вращения этой планеты, время обращения одного из его спутников и отношение расстояния этого спутника к радиусу экватора Юпитера. Пусть будет:

t — время вращения Юпитера
T — время обращения спутника
h — отношение расстояния спутника к радиусу экватора Юпитера.

Предполагая, что Юпитер представляет собой сферу с той же массой, получим $4\pi/3h^2$ для выражения силы, удерживающей спутника на его орбите; это выражение можно считать весьма точным, если пользоваться четвертым спутником, так как отклонение фигуры Юпитера от сферы не может вызвать ошибки бóльшей, чем 1/10000 при определении силы, с которой он действует на этого спутника.

Заметив это, мы легко найдем выражение для центробежной силы на экваторе Юпитера; известно, что на окружностях центробежные силы, так же как и центростремительные, прямо пропорциональны радиусам и обратно пропорциональны квадратам времен обращения, т. е.

$$F = \frac{4\pi}{3h^3}\left(\frac{T}{t}\right)^2$$

Но в § 16 мы нашли величину F, требуемую условиями равновесия сфероида; приравнивая эти два значения, находим:

$$\frac{4\delta}{5}-\frac{6}{35}\delta^2-\frac{2}{35}\delta^3\ldots=\frac{1}{h^3}\left(\frac{T}{t}\right)^2$$

Положив теперь $\frac{1}{h^3}\left(\frac{T}{t}\right)^2=\beta$, мы найдем из предыдущего уравнения:

$$1+\delta=1+\frac{5}{4}\beta+\frac{75}{224}\beta^2+\frac{125}{392}\beta^3\ldots$$

это равенство и дает отношение осей.

Таким образом, осталось обратиться к наблюдениям, чтобы взять из них значение φ. Для этого я приму время вращения Юпитера, по Кассини, $t=9$ час 56 мин. $=596$ мин.; время обращения четвертого спутника $T=16$ дн. 16 час. 32 мин. $=$ $=24\,032$ мин.; расстояние его до центра Юпитера, выраженное в радиусах Юпитера, по Поунду, $h=26.63$.

Подставляя все эти значения в предыдущую формулу, мы найдем, что отношение экватора к оси вращения Юпитера равно отношению $100\,^1/_2$ к $90\,^1/_2$ [47].

Глава II

Определение фигуры жидкой массы, покрывающей твердый сфероид, состоящий из бесконечного множества слоев различной плотности

В этой и в следующих главах я не ставлю своей задачей определить оси сфероида вполне строгим методом; однако ошибки, могущие возникнуть при моем решении, так малы, что было бы бесполезно увеличивать его точность. Например, при определении отношения осей Земли в предположении, что их разность равна 10 льё, можно допустить ошибку, составляющую такую же часть 10 льё, какую составляют 10 льё от земной оси. Всякому понятно, что было бы бесполезно зн—

чительно усложнять вычисления, чтобы учитывать такие величины.

Хотя разность, вроде той, которая имеется между осью вращения и диаметром экватора, в действительности есть величина конечная, я буду называть ее здесь бесконечно малой и буду обращаться с ней, как обращаются с дифференциалами.

§ 23

Принимая, что притяжение каждой частицы материи измеряется ее массой, деленной на квадрат расстояния, я утверждаю, что сфера, состоящая из концентрических слоев, плотность которых на расстоянии r от центра выражается функцией R, притягивает частицу, находящуюся вне сферы на расстоянии e от ее центра, с силой

$$\frac{4\pi}{e^2}\int Rr^2\,dr$$

где π — отношение окружности к диаметру.

Как уже показано в § 13, притяжение однородной сферы, радиус и плотность которой равны 1, на частицы на ее поверхности есть $\frac{4\pi}{3}$; отсюда следует, что сфера той же плотности и радиуса r притягивала бы частицу на расстоянии e от центра с силой $\frac{4\pi}{3}\frac{r^3}{e^2}$ и, следовательно, что

$$\frac{4\pi\,Rr^2\,dr}{e^2}$$

выражает притяжение той же частицы сферической оболочкой плотности R, радиуса r и толщины dr. Поэтому совокупность всех оболочек, иными словами, вся сфера, притягивает частицу с силой

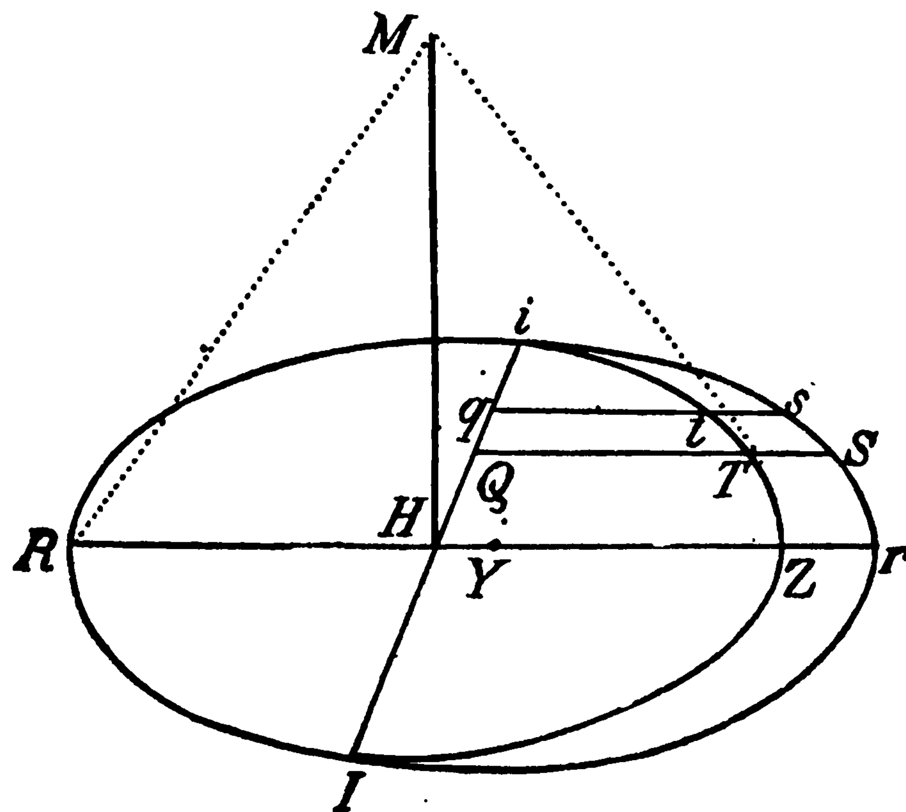
$$\frac{4\pi}{e^2}\int R\,r^2\,dr$$

что и требовалось показать.

§ 24

Пусть дан круг $RirI$ [фиг. 45] с центром Y и M — частица вне этого круга, на перпендикуляре HM к его плоскости, причем H — основание перпендикуляра — удалено на бесконечно малое расстояние от центра Y; утверждаю, что *притяжение*, с *которым круг* $RirI$ *действует на частицу* M *в направлении* HY, *есть*

$$\pi \cdot HY \cdot \frac{RH^2}{MR^3}.$$



Фиг. 45.

Проведем диаметр RHr и перпендикулярную к нему прямую IHi и перенесем фигуру RiI в положение iZI; тогда площадь $iZrI$ будет единственной частью круга $RirI$, которая притягивает частицу M в направлении HY [фиг. 45].

Для того чтобы найти притяжение этой небольшой области, мы предположим, что она разбита на элементы $TtSs$, и для притяжения каждого из этих элементов по направлению HY мы получим величину

$$\frac{TtSs \cdot QT}{MT^3} \quad \text{или} \quad \frac{2HY \cdot Qq \cdot QT}{MR^3}$$

интеграл от которой, именно

$$\frac{2HY \cdot QHTZ}{MR^3}$$

представит притяжение $TZrS$; заменив в этом выражении Ii на QH, получим, что

$$\frac{IHiR \cdot 2HY}{MR^3} \quad \text{или} \quad \pi \cdot \frac{HY \cdot RH^2}{MR^3}$$

дает притяжение площади $iZIr$ или, что то же самое, всего круга $RirI$ на частицу M в направлении HY [48].

§ 25

Если кривая $RirI$ представляет собой не окружность, а эллипс, полуоси которого весьма мало друг от друга отличаются, и даже любую другую кривую, бесконечно мало отличающуюся от окружности, то наше предложение сохранит во всех случаях свою силу.

§ 26

Пусть M — частица, находящаяся на любом расстоянии от центра C эллиптического сфероида $KLkl$, ось которого Kk бесконечно мало отличается от диаметра экватора Ll [фиг. 46]; утверждаю, что *притяжение этим сфероидом частицы M по направлению CX, перпендикулярному к CM, равно*

$$\frac{4\pi}{5}\frac{CX \cdot CN^5}{CM^5}$$

причем MX — нормаль в точке M к эллипсу $PMEpe$, подобному эллипсу $KLkl$.

Проведем через точку M две произвольные бесконечно близкие прямые MRS и $M\mathrm{P}\Sigma$ и из точек R, P, S, Σ опустим перпендикуляры Rr, $\mathrm{P}\rho$, Ss и $\Sigma\sigma$ на диаметр MCI. Очевидно,

что дифференциал притяжения, по направлению CX, слоя сфероида, взятого между плоскостями Rr и Ss, равен притяжению элемента $Rr\mathrm{P}\rho$ без притяжения элемента $Ss\Sigma\sigma$, так как притяжение второго направлено по IZ, т. е. противоположно направлению HY, по которому действует притяжение первого.

Фиг. 46.

Проведя затем диаметр μYCZ, который делит пополам все хорды Rr, Ss, мы получим по § 24 притяжения этих двух элементов [на точку M]:

$$\pi \cdot HY \cdot \frac{RH^2}{MR^3} \cdot Hh$$

и

$$\pi \cdot IZ \cdot \frac{SI^2}{MS^3} \cdot Ii$$

Но мы замечаем теперь,* что без заметной погрешности можно положить угол CMX равным углу $C\mu X$, так как точка μ может быть лишь бесконечно мало удалена от M, потому что эллипс $PEpe$ бесконечно мало отличается от окружности; но угол $C\mu X$ не отличается от угла $MC\mu$, так как $C\mu$ — диаметр для хорд Rr и т. д.; следовательно, касательная в точке μ параллельна Rr или перпендикулярна к MHC; поэтому угол $MC\mu$ можно без заметной погрешности положить равным углу CMX.

При этих условиях имеем:

$$\frac{CH}{HY}=\frac{CI}{IZ}=\frac{CM}{CX}$$

Поэтому, подставляя в предыдущие выражения

$$HY=CH\cdot\frac{CX}{CM}$$

$$IZ=CI\cdot\frac{CX}{CM}$$

получаем для разности притяжений выражение:

$$\pi\cdot\frac{CX}{CM}\left(\frac{RH^2}{MR^3}\cdot CH\cdot Hh-\frac{SI^2}{MS^3}\cdot CI\cdot Ii\right)$$

Для того чтобы его проинтегрировать, я замечаю, что, если бы кривая $KLkl$ была окружностью, мы имели бы:

$$CH^2+RH^2=CR^2$$

---

* Доказательство весьма важной теоремы, о которой здесь идет речь, дано в несколько более развернутом виде, чем у самого Клеро, в том Комментарии Маркизы дю-Шатлэ к ее переводу ньютоновых „Начал“, на который мы ссылаемся в прим. 48, стр. 296; этот Комментарий был просмотрен самим Клеро (см. в нашей статье, стр. 223); поэтому, нисколько не отступая ни от хода мыслей Клеро, ни от стиля эпохи, мы заменяем здесь и в нескольких следующих местах доказательства, данные Клеро, точным переводом соответствующих мест из Комментария дю-Шатлэ (в настоящем случае это доказательство взято со стр. 231—233 ее Комментария) (*Ред.*)

где CR — постоянная; в этом случае было бы

$$CH \cdot Hh = -RH \cdot d(RH)$$

но так как кривая $KL\,kl$ отличается бесконечно мало от окружности, то погрешность этого равенства бесконечно малая, и мы можем им воспользоваться при определении величины притяжения, которая бесконечно мала сама по себе; поэтому в предыдущем выражении можно заменить

$$CH \cdot Hh \quad \text{на} -RH \cdot d(RH)$$

$$CI \cdot Ii \quad „ -SI \cdot d(SI)$$

замечая еще, что

$$\frac{RH}{MR} = \frac{SI}{MS} = \frac{CG}{MC},$$

где CG есть перпендикуляр, опущенный из C на MS, получаю выражение, подлежащее интегрированию

$$\pi \cdot \frac{CX}{CM^4} \cdot CG^3 [d(SI) - d(RH)]$$

Положим теперь

$$CM = e, \quad CN = r, \quad RG = u$$

тогда

$$CG = \sqrt{r^2 - u^2}$$

затем

$$SI - RH = \frac{2u}{e} \sqrt{r^2 - u^2}$$

и предыдущее выражение будет

$$2\pi \frac{CX}{e^5} (r^4 - 3r^2 u^2 + 2u^4)\, du.$$

Интегрируя его, получим:

$$2\pi \frac{CX}{e^5} \left(r^4 u - r^2 u^3 + \frac{2}{5} u^5\right)$$

Таково выражение для притяжения, в направлении CX, сегмента сфероида, заключенного между любыми параллельными плоскостями Rr и Ss.

Если в полученном интеграле заменим u на r, то найдем, что

$$\frac{4\pi}{5} CX \cdot \frac{r^5}{e^5}, \quad \text{или} \quad \frac{4\pi}{5} CX \cdot \frac{CN^5}{CM^5}$$

есть полное притяжение сфероида $KNLkl$, действующее в направлении CX на частицу M [49].

§ 27

Если вместо притяжения по направлению CX мы вообразим силу, которая вызывала бы то же самое действие, но была бы направлена по CV, то выражение этой силы должно быть

$$\frac{4\pi}{5} CV \cdot \frac{CN^5}{CM^5}$$

Действительно, составляющая этой силы по CV [фиг. 46] была бы равна только что полученной нами выше, что же касается той части этой силы, которая действовала бы по CN, то ею можно пренебречь, потому что она была бы бесконечно мала по сравнению с притяжением сфероида в этом направлении [50].

§ 28

Эллиптичностью сфероида я называю дробь, получаемую при делении на ось разности между экватором и осью.*

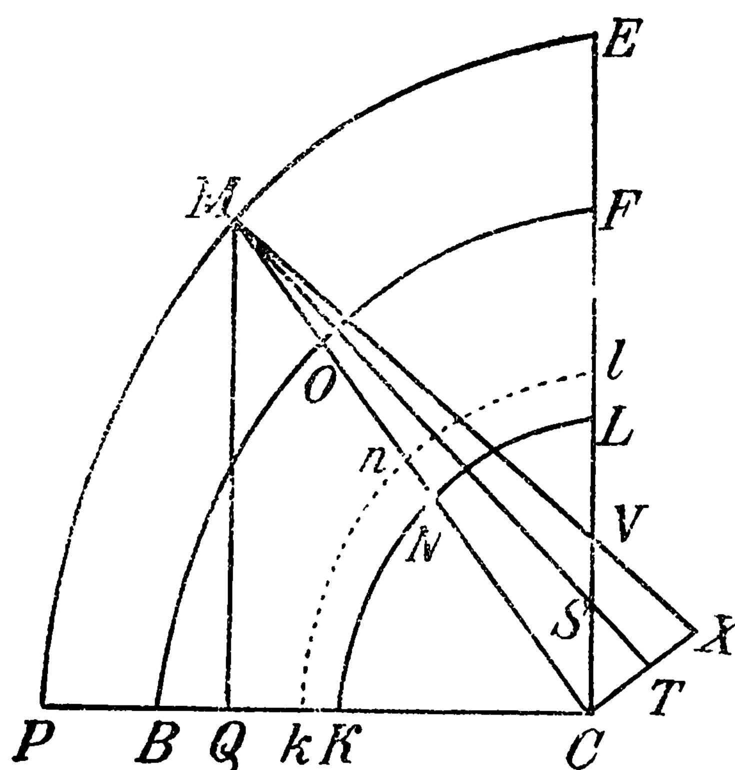
§ 29

Положим, что твердый сфероид, состоящий из бесконечно большого числа эллиптических слоев, бесконечно мало сжатых или удлиненных, у которых плотность и сжатие заданы как

* В дальнейшем тексте „эллиптичность“ заменяется термином „сжатие“; обозначение его $\delta = (a - b)/b$, где a и b большая и малая полуоси (*Ред.*).

функции расстояния от центра, покрыт однородной жидкостью, которая вращается вместе с ним в такое время, что центробежная сила бесконечно мала по сравнению с силой притяжения; при этих условиях требуется: *1) доказать, что при равновесии жидкости поверхность ее с точностью до величин второго порядка малости будет эллиптическим сфероидом, и 2) определить отношение осей, если дано отношение силы тяжести к центробежной силе на экваторе.*

Пусть PBC [фиг. 47] — ось сфероида и ось вращения; PME — поверхность жидкости, предполагаемой в равновесии; BOF — поверхность твердого сфероида; KNL и knl — два бесконечно близких эллипса, которые ограничивают произвольный слой этого сфероида; CM — произвольный радиус; QM — ордината в точке M; MX — перпендикуляр к эллипсу PME в той же точке; MT — перпендикуляр к эллипсу, подобному KNL, который проходил бы через M.



Фиг. 47.

Положим, кроме того:

$$CM=1; \quad CO=a; \quad CN=r; \quad QM=q$$

δ — сжатие эллипса PE

α — сжатие эллипса BF

ρ — сжатие эллипса KL

R — плотность слоя $KNLlnk$

1 — плотность жидкости $PBEF$

Мы имеем здесь:

$$CV=2q\delta, \quad CS=2q\rho$$

На основании § 26 выражение притяжения сфероида KNL, с плотностью 1, на частицу, помещенную в M [взятое в направлении CX], есть:

$$\frac{4\pi}{5} r^5 \cdot CT$$

Если же вместо того, чтобы говорить о притяжении частицы M в направлении CX, мы представим себе силу притяжения, направленную по CV и производящую то же самое действие, то очевидно, что выражение ее будет (§ 27):

$$\frac{4\pi}{5} r^5 \cdot CS$$

или, подставляя в значение CS:

$$\frac{8\pi}{5} q r^5 \rho$$

Взяв дифференциал от этого выражения, считая в нем r и ρ переменными, мы получим дифференциал притяжения точки M слоем $KNLlnk$ плотности 1.

Поэтому интеграл:

$$\frac{8\pi}{5} q \int R\, d(r^5\rho)$$

будет выражать силу, действующую по направлению CV эквивалентную сумме всех притяжений по тому же направлению CV всех слоев [переменной плотности R] от C до N.

Таким образом, обозначая через D величину, в которую обращается

$$\int R\, d(r^5\rho)$$

при $r = a$ и $\rho = \alpha$, мы найдем, что общее притяжение сфероида BOF по направлению CV есть

$$\frac{8\pi}{5} qD$$

Что касается силы такого же свойства, возникающей от притяжения на точку M жидкости $PEFB$, то эта сила равна разности притяжений двух сфероидов PME и BOF, предполагая, что плотность их равна 1. Поэтому, если в общем выражении

$$\frac{8\pi}{5} q \int R \, d(r^5\rho)$$

положить $R=1$ и взять r последовательно равным $[CM=]\,1$ и $[CO=]\,a$, а сжатие ρ равным δ и α, то разность обеих величин, полученных в результате этих подстановок, именно

$$\frac{8\pi}{5} q\,(\delta - a^5\alpha)$$

будет выражением силы, с которой жидкость притягивает частицу M по направлению CV.

Теперь на основании § 23 ясно, что если вместо сфероида PME, составленного заданным образом, мы взяли бы сферу, состоящую из концентрических слоев, обладающих теми же плотностями на одинаковых расстояниях от центра, то притяжение ее по радиусу CM было бы

$$4\pi \int R r^2 \, dr$$

Обозначая через A значение этого интеграла при $r=a$, мы получим величину $4\pi A$ для притяжения сферы радиуса CO прибавляя к нему

$$\frac{4\pi}{3}(1-a^3)$$

за притяжение слоя $PBFE$, предполагаемого сферическим с плотностью 1, мы получим

$$\frac{4\pi}{3}(3A+1-a^3)$$

как выражение общей силы, с которой притягивалась бы частица M к центру C, если принять наш сфероид за шар.

Но мы допустили выше, что центробежная сила составляет лишь бесконечно малую часть притяжения; к тому же разность между притяжением сфероида PME и притяжением шара с тем же радиусом может быть только бесконечно малой по сравнению с притяжением шара; поэтому, если обозначить через φ отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе, то центробежная сила на экваторе будет:

$$\frac{4\pi}{3}(3A+1-a^3)\,\varphi$$

а центробежная сила в точке M:

$$\frac{4\pi}{3}\,q\,(3A+1-a^3)\,\varphi$$

Соединяя все вместе, получим, что

$$\frac{8\pi}{5}\,q\,(D+\delta-a^5\alpha)+\frac{4\pi}{3}\,q\,(3A+1-a^3)\,\varphi$$

выражает *общую силу, приложенную к частице M в направлении CV.*

Но условие равновесия жидкости требует, чтобы на каждую частицу M на поверхности сфероида действовала сила, перпендикулярная к поверхности; следовательно, необходимо, чтобы сила, приложенная к частице M по направлению MC, относилась к силе, действующей на ту же частицу по CV, как CM к CV, т. е. как 1 к $2q\delta$. Посмотрим, имеет ли место это отношение и может ли оно дать нам сжатие δ, иными словами, фигуру сфероида.

Из тех же самых соображений, которыми мы пользовались при определении центробежной силы, можно в этом случае принять

$$\frac{4\pi}{3}(3A+1-a^3)$$

за выражение силы, направленной по CM.

Следовательно, здесь должна иметь место следующая пропорция:

$$\frac{4\pi}{3}(3A+1-a^3):\left[\frac{8\pi}{5}q(D+\delta-a^5\alpha)+\frac{4\pi}{3}q(3A+1-a^3)\varphi\right]=$$
$$=1:2q\delta$$

Но буква q сама собою исчезает из этого равенства; и так как она означает единственную величину, определяющую положение точки M, то, очевидно, что пропорция будет иметь место, если только подходящим образом определить сжатие δ. Сделать это очень легко: так как A, D a, α — величины заданные, то достаточно предыдущую пропорцию превратить в уравнение, чтобы немедленно получить:

$$\delta=\frac{6D-6a^5\alpha+15A\varphi+5\varphi-5a^3\varphi}{30A+4-10a^3}$$

Таким образом, эллипс PE, определяемый этим уравнением, будет пересечен в каждой точке направлением силы тяжести под углом, отличающимся от прямого на бесконечно малую величину второго порядка; следовательно, действительная фигура равновесия жидкости будет отличаться от сфероида PE лишь на величины второго порядка малости [51].

§ 30

Приложение к однородному сфероиду

В этом случае надо положить $R=1$ и

$$\rho=\delta;\qquad \alpha=\delta$$

следовательно,

$$\int Rr^2\,dr=\frac{1}{3}r^3;\qquad \int R\,d(r^5\rho)=r^5\delta$$

откуда

$$A=\frac{1}{3}a^3,\qquad D=a^5\delta$$

Подставляя эти значения в предыдущее уравнение, получим:

$$\delta = \frac{5}{4}\varphi$$

Если мы отметим теперь, как мало это выражение отличается от данного нами в предыдущей главе (§ 17), где оно было выведено с весьма большой точностью, то мы увидим, насколько бесполезно было бы принимать во внимание величины, которыми мы пренебрегали прч выводе предыдущих предложений [52].

§ 31

Приложение к случаю сфероида, в котором, по предположению, имеется твердое однородное ядро, плотность которого отлична от плотности окружающей его однородной жидкости

Пусть $1+f$ выражает плотность ядра. Сохраняя обозначения § 29, будем иметь:

$$A = \frac{1}{3}a^3(1+f) \quad \text{и} \quad D = a^5\alpha(1+f)$$

Подставляя эти значения в общее выражение δ, получим:

$$\delta = \frac{6a^5 f\alpha + 5a^3 f\varphi + 5\varphi}{10a^3 f + 4}$$

это уравнение и даст нам сжатие поверхности сфероида, как только подставим в него значения a, f, α. Если же, наоборот, δ дано из наблюдений, то легко сделать необходимые предположения в отношении радиуса, плотности и сжатия внутреннего ядра, которые могут согласоваться с фигурой планеты.

Действительно, если задать произвольно две из трех величин a, f, α, то третья, полученная из предыдущего уравнения, наверное будет иметь то значение, которое требуется по условию равновесия жидкости. Необходимо только при этих предположениях обращать внимание на то, что

1) α должно быть весьма малой величиной порядка δ

2) a должно быть всегда меньше единицы

3) f никогда не должно иметь отрицательного значения, численно большего единицы [53].

§ 32

Предположим, например, что планета более сжата, чем в случае однородности, и что фигура ядра подобна фигуре планеты. Тогда

$$\delta = \alpha = \frac{5}{4} \varphi (1 + p),$$

где p — некоторое положительное число.

Подставляя эти значения δ и α в предыдущую формулу, получим:

$$f = \frac{-1}{\frac{3}{2p}(a^3 - a^5) + \frac{5}{2} a^3 - \frac{3}{2} a^5}$$

т. е. значение существенно отрицательное. Таким образом, при этих предположениях ядро планеты должно быть менее плотным, чем жидкость, его окружающая [54].

§ 33

Условия, из которых следовало бы, что планета должна быть полой

При тех же предположениях [как и в § 32] и если p — число конечное, но a меньше единицы на бесконечно малую величину λ, то [55]

$$f = -\frac{1}{\frac{3\lambda}{p} + 1}$$

Отсюда видно, что планета представляет собой бесконечно тонкую оболочку, наполненную бесконечно разреженной материей.

Если ставится условие, чтобы у планеты имелась жидкая оболочка конечной толщины, а внутренняя часть ее была совершенно пуста, то достаточно решить уравнение:

$$\frac{3}{2p}(a^3 - a^5) + \frac{5}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^5 = 1$$

и принять за значение a один из положительных его корней, меньших единицы [56].

§ 34

Если требуется, чтобы плотность ядра была больше плотности жидкой планеты и чтобы было $\delta > \frac{5}{4}\varphi$, т. е. чтобы сфероид был более сжатым, чем в случае однородности, то необходимо, чтобы α было больше δ/a^2 и тем более $\alpha > \delta$.

Действительно, если подставим в предыдущее выражение δ (§ 31) вместо α величину

$$\frac{\delta + \gamma}{a^2},$$

то получим:

$$\delta = \frac{5}{4}\varphi + \frac{3a^3f}{2a^3f + 2}\gamma,$$

и здесь второй член может быть отрицательным только при отрицательном γ [57].

§ 35

Замечания о причинах, которыми, по мнению г-на Ньютона, может быть вызвано то, что Земля и Юпитер обладают не тем сжатием, которое получается по его теории

Из предыдущего параграфа видно, что для объяснения, каким образом сжатие Земли может быть больше 1:230, недостаточно, как полагал г-н Ньютон, увеличить плотность частей, прилегающих к центру; действительно, если бы ядро было сферическим, или подобным по форме внешней поверх-

ности, или даже более сжатым (лишь бы только его сжатие не превосходило δ/a^2), то отношение обеих осей всегда окажется меньше, чем 230:231.

Точно так же можно видеть, насколько бесполезно было г-ну Ньютону воображать (когда из его теории сжатие Юпитера получалось меньше, чем оно выводится из наблюдений), что экваториальные области этой планеты более плотны, чем остальная ее часть, потому что они непрерывно накаляются Солнцем. Ему нужно было просто предположить, что ядро плотнее остальных частей планеты, но что сжатие ядра не превосходит только что указанного предела. Этим он избежал бы делать в отношении Юпитера предположение, которое, если бы оно существовало в природе, должно было бы иметь значение и для Земли. Действительно, почему солнечное тепло уплотняло бы так сильно экваториальные части Юпитера и не действовало бы у экватора Земли? В следующей главе мы увидим, что̀ именно побудило г-на Ньютона считать, что если внутренние области более плотные, то и сфероид должен быть более сжатым [58].

§ 36

Условия, при которых планета могла бы принять удлиненную фигуру

Если бы мы поставили задачей объяснить, каким образом планета могла бы быть удлиненной, однако так, чтобы равновесие покрывающей ее жидкости не было нарушено, то и этого можно было бы легко достичь при помощи внутреннего ядра, которое само было бы вытянутым. Действительно, из выражения для сжатия δ, найденного нами в § 31, видно, что если сжатие ядра α отрицательно и численно больше, чем

$$\frac{5\varphi(a^3f+1)}{6a^5f}$$

то δ будет отрицательно; следовательно, сфероид будет вытянутым [59].

§ 37

Преобразование общего уравнения § 29 в случае, когда жидкая оболочка, покрывающая сфероид, предполагается бесконечно тонкой

Если мы допустим, что глубина океана нигде не превосходит высоту гор, то, очевидно, можно считать Землю гладким сфероидом, покрытым бесконечно тонким слоем воды. В этом случае сжатие ядра α равно сжатию жидкой оболочки δ; средний радиус a ядра планеты равен ее среднему радиусу в целом, т. е. $a=1$. При этих условиях общее уравнение § 29 преобразуется в следующее:

$$10A\delta - 2D = 5A\varphi$$

из этого уравнения можно определить сжатие сфероида δ, если только задан закон изменения плотностей и сжатий слоев внутри планеты.

При выборе той функции от r, которой выражается сжатие внутренних слоев ρ, следует помнить, что в нее входит δ, причем ρ должно быть равно δ при $r=1$. К тому же не следует упускать из виду, как и в § 29, что δ весьма малая величина, для всех значений r, от 0 до 1; иначе все предыдущие вычисления, основанные на этом допущении, не могли бы иметь места [60].

§ 38

Из предыдущего уравнения вытекает, что *если плотность уменьшается непрерывно от центра к поверхности, сфероид будет менее сжат, чем в случае однородности, если только сжатие слоев тоже не уменьшается от центра к поверхности, и притом в большем отношении, чем квадраты расстояний.*

Для доказательства допустим, что

$$\rho = \delta\left(\frac{1}{r^2} - u\right)$$

Нам нужно показать, что в этом предположении, считая u величиной положительной, сжатие δ внешней поверхности получится всегда меньше $^5/_4\ \varphi$. Сделать это можно следующим образом. Только что приведенное выражение ρ подставляем в интеграл $\int Rd(r^5\rho)$; при этом он преобразуется в выражение:

$$\delta\left[3\int Rr^2\,dr - Rr^5u + \int r^5u\,dR\right]$$

и, следовательно, здесь получим:

$$D = 3A\delta - G\delta$$

где через G обозначается значение, которое получает выражение

$$Rr^5u - \int r^5u\,dR$$

при $r=1$. Эта величина несомненно положительна, так как, по предположению, dR отрицательно.

Подставляя это выражение D в уравнение [§ 37]

$$10A\delta - 2D = 5A\varphi,$$

получим из него

$$\delta = \frac{5\varphi}{4\left(1+\frac{G}{2A}\right)},$$

иными словами

$$\delta < \frac{5}{4}\varphi,$$

что и требовалось доказать [61].

§ 39

Применение уравнения § 37 для решения задачи, поставленной в Philosophical Transactions, № 449 [1737]

В этой задаче мы принимали для плотности выражение:

$$R = fr^p + gr^q \text{ и т. д.}$$

и, считая все слои подобными, имели $\rho = \delta$.

Отсюда следует, что

$$\int Rr^2\,dr = \frac{f}{3+p}r^{p+3} + \frac{g}{3+q}r^{q+3} \text{ и. т. д.},$$

откуда при $r=1$:

$$A = \frac{f}{3+p} + \frac{g}{3+q} \text{ и т. д.}$$

кроме того:

$$\int Rd(r^5\rho) = \frac{5fr^{5+p}\delta}{5+p} + \frac{5qr^{5+q}\delta}{5+q} \text{ и т. д.},$$

так что, полагая $r=1$,

$$D = 5\delta\left[\frac{f}{5+p} + \frac{q}{5+q} \text{ и т. д.}\right];$$

подставляя затем эти значения в уравнение [§ 37]:

$$10A\delta - 2D = 5A\varphi$$

получаем

$$\delta = \varphi \cdot \frac{\frac{f}{3+p} + \frac{g}{3+q} \ldots}{\frac{4f}{(3+p)(5+p)} + \frac{4g}{(3+q)(5+q)} \ldots}$$

Это уравнение совпадает с выведенным мною в Philosophical Transactions, № 449; оно позволяет определить δ, если f, g, p, $q, \ldots$ заданы по усмотрению, а φ определено из наблюдений.

§ 40

Применение предыдущего уравнения к некоторым сфероидам, исследованным Маклореном

Предположим сначала, что сфероид состоит из подобных слоев, плотности которых пропорциональны их расстояниям до центра. В уравнении § 39 надо положить $g=0$, $p=1$;

тогда оно сведется к $\delta = \frac{3}{2}\varphi$, откуда, полагая $\varphi = 1/288$, получаем для отношения осей Земли отношение 192:193.

Положим затем $p = 3$, считая попрежнему $g = 0$, тогда $\delta = 2\varphi$, т. е. в этом случае отношение осей было бы 144:145.

Вообразим теперь, что сфероид состоит из подобных слоев, плотности которых увеличиваются по мере приближения к центру, причем по величине они пропорциональны расстояниям этих слоев от заданной точки, находящейся вне сфероида.

Предположим далее, что расстояние этой точки от поверхности сфероида составляет n-ю часть ее расстояния до центра. Очевидно, что в предыдущем уравнении [§ 39] надо положить:

$$f = \frac{n}{n-1}, \quad p = 0, \quad g = -1, \quad q = 1$$

и мы найдем из него:

$$\delta = \frac{5}{2}\varphi \, \frac{n+3}{3n+5}.$$

Первый из этих трех случаев г-н Маклорен исследовал в §§ 670, 671, 672 и 673 его „Treatise of Fluxions“ и получил отношение осей Земли, вытекающее из этого предположения, равным $215^3/_4$ к $216^3/_4$.

Второй случай рассмотрен у него в конце § 673; здесь он дает для отношения осей значение 225:226.

Третий случай был исследован г-ном Маклореном в §§ 674, 675, 676, 677; для сжатия сфероида он получил выражение:

$$\frac{10}{m} \, \frac{(n+3)(n+2)}{17n^2 + 34n + 45}$$

где $1/m$ есть величина, которую я здесь называю φ.

Таким образом, результаты г-на Маклорена совершенно отличны от тех, которые вытекают из моей теории. Причина этого расхождения заключается в том, что я считал внутреннее ядро сфероида твердым и искал, какова должна быть фигура поверхности, чтобы покрывающая его жидкость была

в равновесии. Но г-н Маклорен, наоборот, предполагал сфероид жидким и определял, каково должно быть отношение осей, чтобы столбы жидкости, соответствующие полюсу и экватору, имели одинаковый вес. Однако, независимо от того, был ли сфероид первоначально жидким или нет, очевидно, что после отвердевания внутренних частей необходимо, как и раньше, чтобы сила тяжести во всех точках внешней поверхности была направлена по перпендикуляру к ней. Следовательно, мое уравнение по необходимости всегда должно иметь место, для того чтобы во́ды, покрывающие поверхность, были в равновесии. Но меня могут спросить: почему не должно иметь места также и уравнение г-на Маклорена? Разве сфероид не мог быть первоначально жидким, на том основании, что условие равновесия столбов приводит к уравнению, отличному от того, которое получается из условия о поверхности уровня?

На это я отвечу: то, что сфероид был первоначально жидким, допустимо; но тогда слои его не могли бы быть подобны друг другу. В главе IV мы увидим, какова должна быть фигура слоев, если предположить, что весь сфероид состоит из жидкой массы.

Глава III

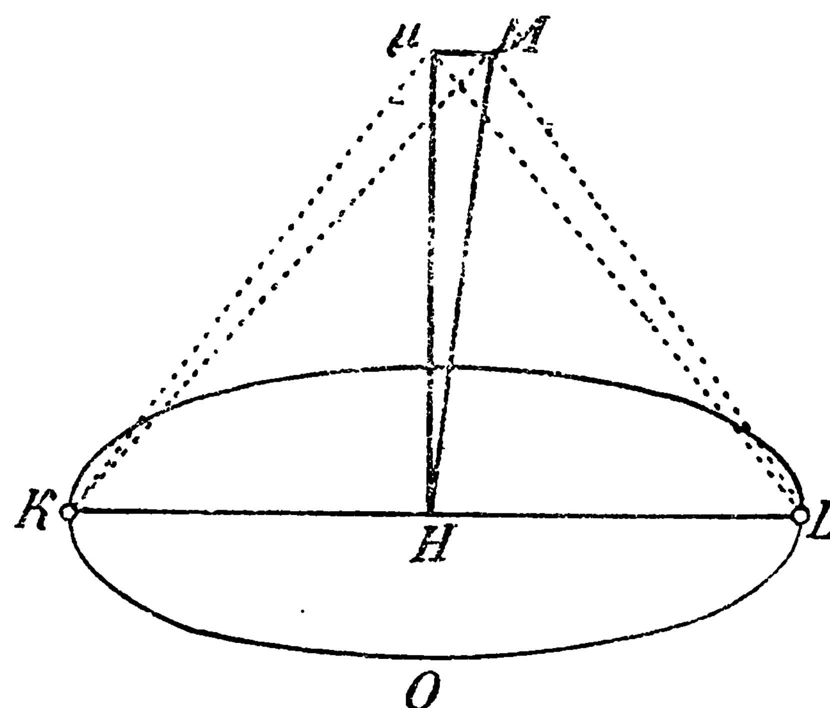
Способ определения изменений тяжести от экватора к полюсу на сфероиде, состоящем из слоев, плотность и сжатие которых изменяются от центра до поверхности по какому-либо закону

§ 41

Пусть дана окружность KOL [фиг. 48], H — ее центр, μH — перпендикуляр к плоскости этой окружности, MH — прямая, равная μH и образующая с ней бесконечно малый угол; утверждаю, что притяжение окружностью KOL

частицы, помещенной в M, может без заметной погрешности быть принято за притяжение этой окружностью частицы, находящейся в μ; или, что то же самое, что эти две силы притяжения отличаются на величину бесконечно малую по сравнению с ними самими и бесконечно меньшую, чем μM по сравнению с μH.

Для того чтобы доказать это утверждение, нужно убедиться в том, что сумма притяжений на частицу M от двух частиц K и L, находящихся на концах любого диаметра, может считаться равной сумме притяжений частицы μ теми же частицами K и L. Но легко видеть, даже без вычисления притяжения частицы M частицей K, что оно равно притяжению на точку μ, сложенному с бесконечно малой величиною, в которую $M\mu$ входит множителем. Понятно также, что притяжение точки L на точку M будет равно притяжению на точку μ, но за вычетом то же самой бесконечно малой величины. Следовательно, $K+L$ притягивает одинаково как точку M, так и точку μ; то же самое будет справедливо и для всей окружности KOL [62].



Фиг. 48.

§ 42

Если бы вместо окружности KOL мы взяли эллипс или какую-нибудь другую кривую, диаметры которой делятся в ее центре пополам, то очевидно, что предыдущее предложение сохранило бы свою силу и в этих случаях.

§ 43

Пусть даны круг и овал, сжатие которого бесконечно малò, имеющие одинаковую площадь и один и тот же центр; утверждаю, что притяжения ими частицы, помещенной над центром, будут равны.

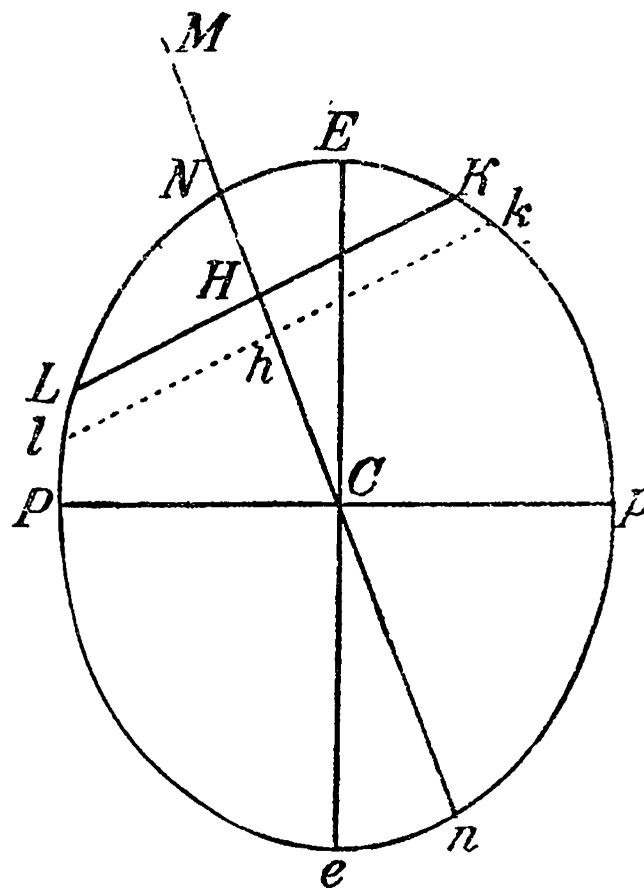
Действительно, отнимем от круга и овала, — имеющего ту же самую площадь, — ту часть площади, которая у них общая; остающиеся части будут бесконечно узкими, так что все точки их можно считать находящимися на одинаковом расстоянии от притягиваемой точки, которую мы предполагаем помещенной над центром. Следовательно, притяжение будет зависеть только от количества материи; но эти количества равны по предположению, а потому и т. д.

§ 44

Пусть $PEpe$ — эллиптический сфероид, ось вращения которого Pp бесконечно мало отличается от экваториального диаметра; утверждаю, что притяжение этим сфероидом частицы, находящейся в M, равно притяжению этой же частицы сфероидом, у которого N является полюсом, Nn осью вращения и количество материи то же самое, как у сфероида $PEpe$ [фиг. 49].

Представим себе, что сфероид $PEpe$ разделен на бесконечное число слоев плоскостями, проходящими через хорды LK, lk, сопряженные с диаметром NCn, и что затем эти плоскости повернуты около точек H и h так, чтобы они стали перпендикулярны к Nn. Но угол KHC отличается бесконечно мало от прямого; поэтому ясно, что тело, полученное при новом распределении слоев, будет отличаться от сфероида $PEpe$ лишь на величину бесконечно малую второго порядка; следовательно, можно считать, что оно имеет со сфероидом одинаковый объем.

Далее, согласно § 42, притяжение частицы M слоями KL kl будет одно и то же, как в том случае, когда эти слои образуют с диаметром CN угол, бесконечно мало отличающийся от прямого, так и в том, когда они в точности перпендикулярны этому диаметру, как это имеет место в новом теле. Действительно, по § 43,* притяжение каждого из эллиптических слоев, образующих сфероид $PEpe$, может считаться равным притяжению круговых слоев, с той же площадью, так как, по предположению, эти эллипсы отличаются бесконечно мало от [полученных] окружностей; но эти последние находятся в тех же плоскостях, что̀ и эллипсы, и центры тех и других совпадают; разница в их притяжениях на частицу M могла бы происходить только от избытка или недостатка расстояний до M тех частей, которые изобразятся луночками, остающимися после отнятия общей части площадей; но так как эти луночки бесконечно малы́, то различие в расстояниях до притягиваемого тела может вызвать только разность второго порядка малости в притяжениях. Таким образом, данный сфероид $PEpe$ и сфероид того же объема, но с осью Nn, притягивают одинаково частицу M.



Фиг. 49.

§ 45

Найти притяжение сфероида $BEbe$, сжатие которого бесконечно мало́, на частицу, находящуюся в точке P на его оси вращения

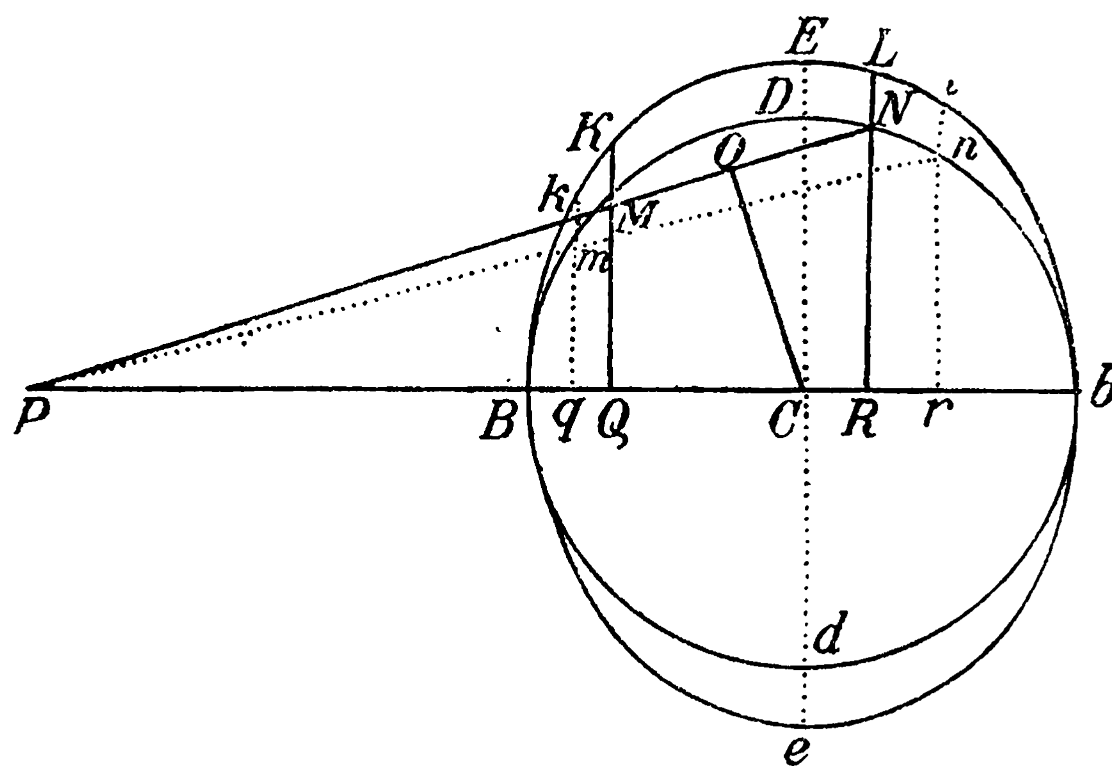
Впишем в сфероид сферу $BDbd$ [фиг. 50] и, проведя через точку P две произвольные прямые PMN и Pmn, образующие

* Отсюда до конца параграфа по Комментарию дю-Шатлэ, на стр. 227 ее труда, указанного в прим. 48 (*Ред.*).

между собой бесконечно малый угол, опустим из точек M, m, N и n на ось Bb перпендикуляры KMQ, kmq, LNR и lnr.

Примем за элемент объема, заключенного между сферой и сфероидом, сумму объемов двух колец, образованных вращением вокруг оси Bb обеих площадок $KMmk$ и $LNnl$.

Очевидно, что вследствие малости MK можно считать, что все точки кольца $KMmk$ одинаково удалены от P. То же самое и относительно точек кольца $LNnl$.



Фиг. 50.

Поэтому надо будет умножить количество материи кольца $MKmk$ на PQ/PM^3, чтобы получить притяжение им частицы P; точно так же следует умножить количество материи кольца $LNnl$ на PR/PN^3, чтобы получить притяжение его на ту же частицу P.

Объем кольца $MKmk$ равен

$$2\pi \cdot QM \cdot MK \cdot Qq$$

или

$$2\pi \cdot \frac{ED}{CD} \cdot QM^2 \cdot Qq$$

так как

$$\frac{MK}{QM} = \frac{DC}{DE}$$

по свойству эллипса. Следовательно, притяжение этого кольца будет:

$$2\pi \cdot \frac{ED}{CE} \cdot QM^2 \cdot \frac{PQ}{PM^3} \cdot Qq$$

или

$$2\pi \cdot \frac{ED}{CE} \cdot CO^2 \cdot \frac{PO}{PC^3} \cdot Qq$$

где CO — перпендикуляр к PN.

Точно так же притяжение кольца $LNnl$ равно:

$$2\pi \cdot \frac{ED}{CE} \cdot CO^2 \cdot \frac{PO}{PC^3} \cdot Rr$$

Следовательно, притяжение обоих колец есть:

$$2\pi \frac{ED}{CE} \cdot CO^2 \cdot \frac{PO}{PC^3} \cdot d(QR)$$

Обозначим теперь:

малую ось $CD = CB = r$, сжатие сфероида, или $\frac{ED}{CD} = \delta$,

$$MO = ON = u, \quad PC = e,$$

так что будет:

$$CO = \sqrt{r^2 - u^2}$$

и отсюда

$$PO = \sqrt{e^2 - r^2 + u^2}$$

$$QR = \frac{2u}{e} \sqrt{e^2 - r^2 + u^2}\,^{*}$$

Подставляя эти значения в предыдущее выражение, преобразуем его в следующее:

$$\frac{2\pi\delta}{e^4} [2e^2r^2 - 2r^4 + u^2(6r^2 - 2e^2) - 4u^4]\, du;$$

интеграл его, равный

$$\frac{2\pi\delta}{e^4}\left[(2e^2r^2-2r^4)\,u+\frac{u^3}{3}(6r^2-2e^2)-\frac{4}{5}u^5\right]$$

представит притяжение частицы P телом, образованным вращением площади $KELMDN$ вокруг оси Bb.

Если сделаем в этом выражении $u=r$ и прибавим величину

$$\frac{4\pi}{3}\frac{r^3}{e^2}$$

которой определяется притяжение сферы (§ 23), то найдем, что

$$\frac{4\pi}{3e^2}r^3(1+2\delta)-\frac{8\pi}{5}\frac{r^5}{e^4}\delta$$

есть притяжение сфероида $BEbe$ на частицу P[63].

§ 46

Предполагая, что сфероид состоит из бесконечного числа эллиптических слоев, сжатие и плотность которых изменяются по любому закону, требуется найти притяжение этого сфероида на частицу, помещенную в любой точке M на его поверхности PME

Введем такие обозначения [фиг. 51]:

Малая полуось сфероида . . . . . . $CP=e$
Радиус экватора этого сфероида . . $CE=e(1+\delta)$
Малая полуось любого слоя BNF . . $CB=r$
Радиус его экватора . . . . $CF=r(1+\rho)$
Синус угла PCM . . . . s
Плотность в B . . . . R

Легко найти, что

$$CM=e(1+\delta s^2)$$

$$CN=r(1+\rho s^2)$$

и что сжатие сфероида, у которого объем был бы равен объему сфероида BNF, но ось вращения была бы NC, есть:

$$\rho\left(1-\frac{3}{2}s^2\right)$$

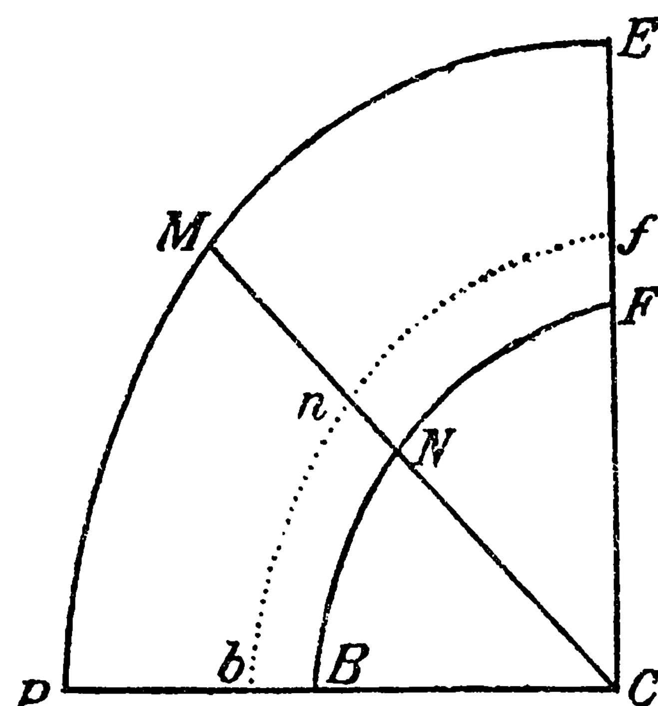
Для того чтобы получить теперь притяжение на точку M, предполагая сфероид однородным, необходимо, следуя сказанному в § 44, подставить в формулу, данную в § 45, вместо r, e и δ, величины

$$r(1+\rho s^2),\quad e(1+\delta s^2),\quad \rho\left(1-\frac{3}{2}s^2\right);$$

вычисление весьма простое, так как здесь достаточно в членах

$$-\pi\left(\frac{r^3}{e^2}-\frac{3}{5}\frac{r^5}{e^4}\right)\delta$$

заменить δ на $\rho\left(1-\frac{3}{2}s^2\right)$, а к первому члену той же формулы, именно $\frac{4\pi}{3}\frac{r^3}{e^2}$, нужно прибавить его дифференциал, заменяя в нем dr на $rs^2\rho$ и de на $es^2\delta$.



Фиг. 51.

Таким образом, получим, что притяжение сфероида BNF на точку M, принимая его плотность равной 1, есть:

$$\frac{4\pi r^3}{3e^2}-\frac{8\pi\delta}{3e^2}r^3s^2+\frac{8\pi}{3e^2}r^3\rho-\frac{8\pi}{5e^4}r^5\rho+\frac{12\pi}{5e^4}r^5\rho s^2$$

Но так как сфероид не однороден и плотность его изменяется от центра к поверхности соответственно любой заданной функции R, то мы должны дифференцировать предыдущее выражение [считая в нем r и ρ переменными] и умножить дифференциал на R, для того чтобы получить притяжение

любого слоя $BFfb$; таким образом, это притяжение оказывается равным:

$$\frac{4\pi}{e^2}Rr^2\,dr - \frac{8\pi\delta}{e^2}s^2Rr^2\,dr + \frac{8\pi}{3e^2}R\,d(r^3\rho) - \frac{8\pi}{5e^4}R\,d(r^5\rho) +$$

$$+ \frac{12\pi}{5e^4}s^2R\,d(r^5\rho)$$

Интеграл от этого выражения и даст притяжение всего сфероида.

Обозначим через A, B, D значения, которые принимают при $r=e$ интегралы

$$\frac{1}{e^2}\int Rr^2\,dr;\quad \frac{1}{e^2}\int R\,d(r^3\rho);\quad \frac{1}{e^4}\int R\,d(r^5\rho).$$

Мы получим тогда:

$$4\pi A(1-2\delta s^2) + \frac{8\pi}{3}B - \frac{8\pi}{5}D\left(1-\frac{3}{2}s^2\right)$$

Но так как величины R и ρ суть функции от r, которые считаются заданными по условиям задачи, то количества A, B, D зависят только от квадратур; таким образом, задача наша решена [64].

§ 47

Если в этой формуле положим $s=0$, то получим

$$4\pi A + \frac{8\pi}{3}B - \frac{8\pi}{5}D;$$

таково притяжение на частицу, помещенную на полюсе, или ее тяжесть.

§ 48

Пусть сфероид, о котором шла речь выше, вращается вокруг его оси; утверждаю, что каково бы ни было время его вращения, величина, на которую сила тяжести на

*полюсе превосходит силу тяжести в любом месте, пропорциональна квадрату косинуса широты этого места.**

Пусть φ есть отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе; по тем же соображениям, которые были приведены [§ 29], мы можем, вычисляя центробежную силу, положить притяжение равным $4\pi A$; тогда центробежная сила на экваторе будет $4\pi A\varphi$, а центробежная сила в точке M [фиг. 51]:

$$4\pi A\varphi \frac{QM}{CE}$$

так как центробежные силы относятся, как радиусы, когда тела вращаются в одинаковое время.

Эта сила действует по QM; взяв ее составляющую по направлению радиуса CM, мы получим:

$$4\pi A\varphi \cdot \frac{QM^2}{CE \cdot CM}$$

но это выражение без заметной погрешности можно положить равным:

$$4\pi A\varphi \cdot \frac{QM^2}{CM^2}$$

или

$$4\pi A\varphi \cdot s^2$$

обозначая, как выше, через s синус угла PCM. Вычитая эту силу из той, которую мы получили в § 46 и которой определяется притяжение сфероида в том же направлении CM, мы найдем для силы тяжести в любом месте следующее выражение:

$$4\pi A + \frac{8\pi}{3} B - \frac{8\pi}{5} D + s^2 \left(\frac{12\pi}{5} D - 8\pi A\delta - 4\pi A\varphi\right)$$

---

* Доказательство этой теоремы приводится здесь по Комментарию дю-Шатлэ, стр. 255 ее работы, указанной в прим. 48 (*Ред.*).

Здесь было допущено, что направление притяжения совпадает с радиусом CM; это не вполне точно, однако может быть принято в настоящем случае, так как составляющая силы по направлению, бесконечно мало отличающемуся от радиуса, сама отличается от этой силы на величину второго порядка малости.

Если предыдущее выражение вычесть из выражения притяжения [или веса] частицы на полюсе [§ 47], то разность, равная

$$s^2\left(8\pi A\delta + 4\pi A\varphi - \frac{12}{5}\pi D\right),$$

обнаружит нам, что уменьшение силы тяжести от полюса к экватору пропорционально квадрату косинуса широты; так как, без заметной погрешности, можно принять угол PCM за дополнение широты, если сфероид весьма мало отличается от сферы. Таким образом, в этом отношении для неоднородного сфероида получается тот же самый результат, который был найден выше в § 19 для однородного сфероида [[65]].

§ 49

Пусть время обращения сфероида, о котором здесь идет речь, соответствует условию равновесия жидкости, расположенной на его поверхности; обозначим, как выше, через δ сжатие сфероида, через P силу тяжести на его полюсе, через Π — силу тяжести на экваторе и через ε — сжатие, которым обладал бы этот сфероид, если бы мы предположили его однородным; утверждаю, что:

$$\frac{\mathrm{P}-\Pi}{\Pi} = 2\varepsilon - \delta,$$

и притом каковы бы ни были расположение и форма слоев, из которых составлен сфероид. *

* Последняя, весьма важная, фраза отсутствует в тексте Клеро, но имеется у дю-Шатлэ, на стр. 256 ее труда, указанного в прим. 48 (*Ред.*).

Положив $s=1$ в последней формуле § 48, найдем, что

$$8\pi A\delta + 4\pi A\varphi - \frac{12}{5}\pi D$$

представляет собой избыток тяжести на полюсе над тяжестью на экваторе, т. е. величину Р — П; нам необходимо разделить ее на П; но так как мы всегда пренебрегаем здесь бесконечно малыми величинами второго порядка, то можно вместо П взять $4\pi A$, что представляет собой притяжение на сфере, с таким же строением, как у сфероида. Мы получим тогда:

$$2\delta + \varphi - \frac{3}{5}\frac{D}{A} = \frac{\text{Р} - \text{П}}{\text{П}}$$

Но мы видели в § 37, что для того, чтобы жидкость, находящаяся на поверхности сфероида, могла быть в равновесии, должно быть соблюдено условие:

$$\delta = \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{5}\frac{D}{A}$$

Таким образом, в предыдущее уравнение вместо $\frac{3}{5}\frac{D}{A}$ можно подставить $3\delta - \frac{3}{2}\varphi$; после подстановки получим:

$$\frac{5}{2}\varphi - \delta = \frac{\text{Р} - \text{П}}{\text{П}}$$

Но, по § 30, $\frac{5}{4}\varphi$ есть величина ε, или сжатие однородного сфероида. Таким образом

$$\frac{\text{Р} - \text{П}}{\text{П}} = 2\varepsilon - \delta$$

что и требовалось доказать [66].

§ 50

Способ определения фигуры Земли по укорочению длины маятника

Из предыдущего параграфа следует, что если из наблюдений найдена величина, на которую надо удлинить маятник, отбивающий секунды на экваторе, для того чтобы его коле-

бания происходили в то же самое время на полюсе, то мы тотчас же получим сжатие Земли, считая, что она образована так, как мы здесь предполагали; действительно, величина ε, т. е. сжатие Земли, при условии ее однородности, была найдена равной $^1/_{230}$ (в § 20). Поэтому теперь оказывается, что *достаточно вычесть из* $^1/_{115}$ *ту дробь, которой выражается полное укорочение длины маятника от полюса к экватору, чтобы получить сжатие Земли.*

Легко видеть, что эта теорема прямо противоречит тому, что утверждал г-н Ньютон в Предложении XX третьей книги „Principia“; действительно, найдя, что различные маятниковые наблюдения дают больше $^1/_{230}$-й для уменьшения тяжести от полюса к экватору, он заключал, что сжатие Земли должно также быть больше $^1/_{230}$-й; между тем, по предыдущей теореме, сжатие должно быть настолько же меньше $^1/_{230}$-й, насколько укорочение длины маятника превышает эту дробь.

Однако в отношении другого замечания, сделанного г-ном Ньютоном в том же месте, — именно, что наблюденное уменьшение значений тяжести от полюса к экватору указывает на бо́льшую плотность в центре, чем на поверхности, то это согласуется с моей теорией; так как из предыдущей главы видно, что при самых естественных предположениях относительно формы внутренних слоев, всегда получается, что, когда наиболее плотные слои близки к центру, сжатие меньше $^1/_{230}$; а это, по предыдущему параграфу, требует уменьшения тяжести больше, чем на $^1/_{230}$-ю [67].

§ 51

Здесь разъясняется, что́ именно привело г-на Ньютона к утверждению, что планеты, обладающие большей плотностью в центре, чем на поверхности, должны быть более сжатыми, чем если бы они были однородными

Уже несколько лет тому назад я доказал в Philosophical Transactions, № 449 [1737] теорему, изложенную в § 50, и привел по этому случаю утверждения г-на Ньютона, противоре-

чащие ей. Но, не имея тогда второго издания его „Principia“, я не мог выяснить, чтó собственно послужило основанием таких утверждений знаменитого автора. Но я отнюдь не думал выводить из этого, исходя из моей теоремы, что г-н Ньютон ошибся; я полагал только, что разница в наших заключениях происходила оттого, что мои предположения о строении внутренних частей Земли не совпадали с предположением г-на Ньютона и что, по всей вероятности, он принял такую гипотезу, при которой его заключение было правильно. Я основывался тогда только на комментаторах г-на Ньютона, в особенности на словах г-на Грегори, и я показал тогда, что толкование слов г-на Ньютона, которое давал г-н Грегори неправильно, потому что он основывался на положении, не имеющем места в том случае, к которому он его прилагал. Действительно, теорема о том, что значения силы тяжести в различных местах Земли относятся друг к другу обратно пропорционально расстояниям до центра, верна только при условии однородности Земли; следовательно, она не может быть применена в случае, когда плотность частей, близких к центру, иная, чем у поверхностных слоев.

С тех пор, как я установил, что теорема, доказательство которой было дано мною в Philosophical Transactions для случая подобных слоев, применима и к бесконечному числу других случаев, я начал более тщательно исследовать, чтó же могло заставить г-на Ньютона считать, что Земля должна быть тем более сжатой, чем больше уменьшается тяжесть от полюса к экватору; и, повидимому, я нашел основание к этому во втором издании „Principia“: г-н Ньютон исходил из того же положения, как и г-н Грегори. Вот что убедило меня в этом.

На стр. 386 г-н Ньютон, отметив, что наблюдения дают уменьшение длины маятника от полюса до экватора на 2 линии, говорит, что так как предположение однородности дало бы только $1^{87}/_{1000}$ линии, то надо увеличить в том же отношении $1^{87}/_{1000}$ к 2 и разность обеих осей. В предположении однород-

ности эта разность равна $17\,^1/_6$ мили, так что действительная разность осей должна быть $31\,^7/_{12}$ мили; и это потому, — добавляет он, — что запаздывание маятника на экваторе доказывает уменьшение притяжения в области экватора, а чем легче там вещество, тем выше оно должно лежать, чтобы быть в равновесии с материей на полюсе.

Далее, на стр. 387, исследуя измерения градусов широты во Франции, произведенные Кассини, г-н Ньютон говорит, что так как из этих измерений следует, что Земля на полюсе выше, чем на экваторе, приблизительно на 95 миль, то длина маятника на экваторе должна быть больше, чем на полюсе, приблизительно на 6 линий. Все это доказывает, как мне кажется, что г-н Ньютон полагал, что во всех случаях тяжесть должна быть обратно пропорциональна радиусам, чтобы столбы были в равновесии; но я надеюсь, все согласятся теперь, что в §§ 18 и 49 достаточно убедительно доказано, что это положение справедливо только в случае однородности; но в общем случае оно неверно. Таким образом, мое возражение в Philosophical Transactions против г-на Грегори является возражением и против г-на Ньютона.

§ 52

Замечание по поводу той гипотезы, о которой г-н Маклорен говорит в §§ 666 и 681 его „Treatise of Fluxions"

Г-н Маклорен, пересмотрев все возможные гипотезы, в которых он предполагает Землю наполненной материей до центра, и найдя, что во всех этих случаях, если сжатие больше $^1/_{230}$, то длина маятника должна быть уменьшена от полюса к экватору на величину, меньшую этой дроби, исследует затем, что получится в предположении, что Земля пуста, но имеет центральное ядро.* В выбранном им примере он предполагает,

* Это гипотеза, выдвинутая г-ном Галлеем для объяснения явлений земного магнетизма.

что обе поверхности ее жидкой оболочки подобны и что ядро имеет сферическую форму, причем плотности оболочки и ядра одинаковы. Он находит, что в этом случае Земля могла бы иметь сжатие больше, чем $^1/_{230}$, хотя уменьшение длины маятника было тоже больше $^1/_{230}$; но это противоречит моей только что доказанной теореме, так как пространство между ядром и оболочкой может быть рассматриваемо, как слой с нулевой плотностью, и сумма сжатия и уменьшения длины маятника должна попрежнему быть равной $^1/_{115}$.

Причина расхождения вычислений г-на Маклорена с моей теоремой лежит в том, что метод этого автора состоит в приравнивании весов двух столбов жидкости, измеряющих толщину оболочки на экваторе и на полюсе. Однако для применения этого метода надо считать сфероид г-на Маклорена как бы находившимся первоначально в жидком состоянии, независимо от того, принимаем ли мы пространство между оболочкой и ядром пустым или наполненным не притягивающей материей. В первом случае я утверждаю, что оболочка или, вернее, жидкий слой должен упасть на ядро и образовать с ним один однородный сфероид, со сжатием в $^1/_{230}$. Во втором случае равновесие жидкой оболочки не будет следовать из равенства весов двух столбов, которыми измеряется толщина оболочки на полюсе и на экваторе, так как условие равновесия требует обязательно, чтобы направление силы тяжести пересекало внешнюю и внутреннюю поверхности жидкой оболочки по перпендикулярам; но это невозможно, если обе эти поверхности подобны. Следовательно, метод г-на Маклорена не применим к предложенному им сфероиду. Если же поставить условием, чтобы такой сфероид был возможен, надо предполагать, что оболочка его твердая и покрыта только бесконечно тонким слоем воды; но тогда вместо результата г-на Маклорена получится тот, к которому приводит изложенное мной в § 50.

Впрочем, я должен отдать справедливость г-ну Маклорену в том, что он не настаивал на своей гипотезе; об этом он сам

говорит в § 681, отмечая, что равенство весов двух столбов, измеряющих толщину оболочки на полюсе и у экватора, может быть только совершенно произвольным допущением.

§ 53

Об изменении тяжести на вытянутом сфероиде

В предыдущей главе я показал (§ 36), что жидкость, покрывающая поверхность вытянутого сфероида, могла бы быть в равновесии, если бы у этого сфероида имелось ядро, тоже удлиненное и с подходящим отношением осей. Теперь мы увидим, что при этих же предположениях очень хорошо объясняется уменьшение длины маятника от полюса к экватору. По доказанному в § 50, если δ — сжатие Земли, то $^1/_{115} - \delta$ есть уменьшение длины маятника. Но при δ отрицательном уменьшение этой длины будет $^1/_{115} + \delta$, так что уменьшение тяжести к экватору более заметно на вытянутом сфероиде, чем на сжатом.

Впрочем, я делаю это замечание не с тем, чтобы подвергнуть малейшему сомнению те измерения, которыми было установлено, что Земля сжата у полюсов. Действительно, даже помимо того, что эти измерения произведены с точностью, исключающей всякие возражения, надо обратить внимание на следующее: это замечание не только не устраняет те затруднения, которые возникали при необходимости согласовать вытянутость Земли с уменьшением длины маятника, но, напротив, оно может создать для сторонников вытянутой Земли новые трудности, еще более значительные, чем прежние. Предположим, например, вместе с г-ном Кассини, что Земля — вытянутый сфероид, сжатие которого $^1/_{93}$; таким образом, здесь $\delta = -{}^1/_{93}$, и отсюда, по § 50, получаем $^1/_{93} + {}^1/_{115}$ или $^1/_{51}$, т. е. 8 или 9 линий приблизительно для уменьшения длины маятника от полюса к экватору; однако все наиболее точные наблюдения дают, в согласии друг с другом, прибли-

зительно 2 линии для этого уменьшения; таким образом, здесь мы имели бы дело с ошибками в 6 или 7 линий; однако возможность их совершенно исключается.

Глава IV

Определение фигуры Земли в предположении, что у нее никогда не было твердых частей и что она состояла из скопления бесконечного множества жидкостей различной плотности*

§ 54

Пусть rqQR [фиг. 52] — эллиптический слой, или разность объемов двух сфероидов rq и RQ, малые полуоси которых rC и RC, а радиусы экватора — Cq и CQ; утверждаю, что если δ *обозначает сжатие внешнего сфероида, а* ε *— сжатие внутреннего, то*

$$\frac{8\pi}{5}\cdot LN\cdot(\delta-\varepsilon)$$

есть величина той силы, которая, притягивая частицу N по направлению CQ, производит то же самое действие, как притяжение слоя rqQR по направлению CX, перпендикулярному к CN.

Проведем через точку N два сфероида FNG и fNg: первый — подобный сфероиду RHQ, а второй — сфероиду rhq. Легко видеть, что притяжение слоя $rqQR$ равно притяжению сфероида fNg без притяжения сфероида FNG.

Если мы проведем затем Nx и NX перпендикулярно к этим сфероидам, то, на основании § 27, можно заменить притяжения обоих сфероидов по направлению CX двумя силами, действующими по направлению CV, выражения которых $\frac{4\pi}{5}\cdot CV$

* [68].

и $\frac{4\pi}{5} Cu$. Образовав разность этих величин и подставляя вместо CV и Cu их значения $2\varepsilon \cdot LN$ и $2\delta \cdot LN$, получим, что

$$\frac{8\pi}{5} \cdot LN \cdot (\delta - \varepsilon)$$

выражает величину силы, направленной по CV и равновеликой силе притяжения частицы N слоем $rqQR$ по направлению CX [69].

§ 55

Предполагая, что жидкая сфера, состоящая из бесконечного множества сферических слоев, плотности которых заданы произвольно, пришла бы во вращение вокруг одного из ее диаметров, требуется: 1) доказать, что если эта масса находится в равновесии, то ее поверхность и поверхности всех составляющих ее слоев будут, без заметной погрешности, поверхностями эллиптических сфероидов, если вращение таково, что центробежная сила на экваторе составляет весьма малую часть тяжести, и 2) найти, при тех же предположениях, зависимость между функцией, выражающей закон плотностей, и функцией, выражающей изменение сжатия слоев

На основании положений, установленных в § 66 первой части, сфероид может быть в равновесии лишь при условии, что все силы, действующие на произвольную частицу M внутри сфероида, приводятся к одной силе, направленной по перпендикуляру к слою FNG в точке N; причем плотность этого слоя должна быть везде такая же, как при точке N.

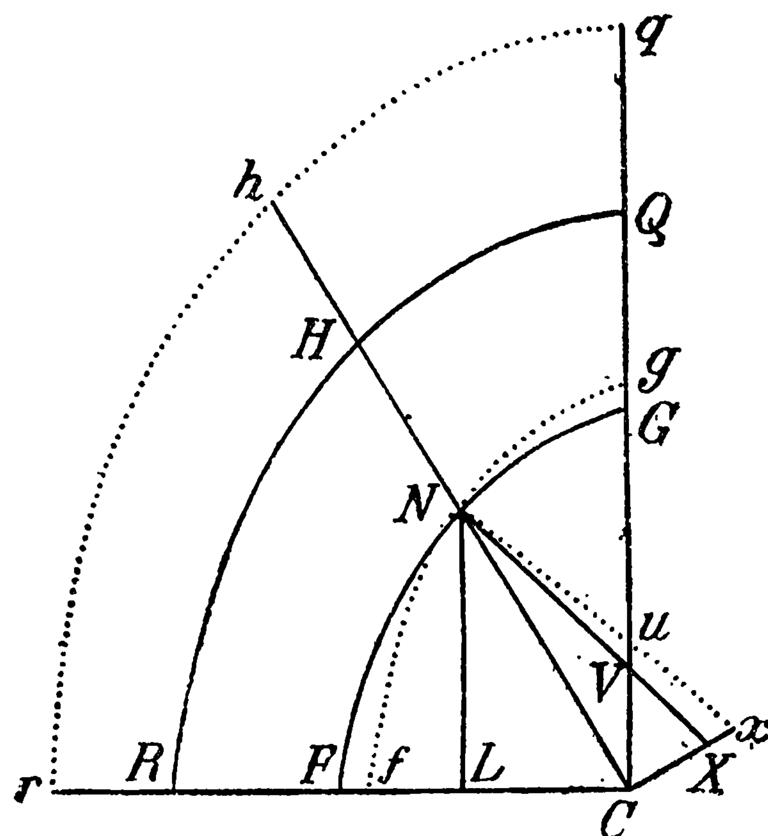
Посмотрим же, какие силы дадут эту равнодействующую. Мы найдем здесь [фиг. 53]:

1) силу, направленную к C, происходящую от притяжения точки N эллипсоидом FNG; в этом случае она без заметной ошибки может быть заменена той силой, какой она была бы, если бы сфероид снова принял ту форму шара, которую он, по предположению, имел до его вращения;

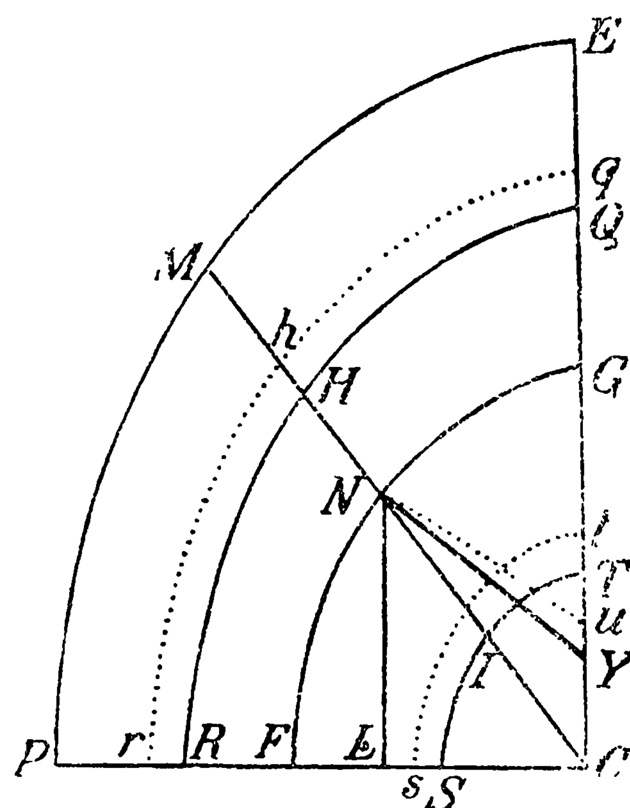
2) силу, направленную по CV, равную по величине притяжению сфероида FNG по перпендикуляру к CN;

3) силу, взятую в том же направлении, вызванную притяжением слоя $PFEG$;

4) центробежную силу в точке N, которая относится к центробежной силе на экваторе, как LN к CE.



Фиг. 52.



Фиг. 53.

Положим, как и раньше [§ 29]:

Малая полуось сфероида	$CP = 1$
Малая полуось слоя	$CF = r$
Плотность в точке F и во всем слое FNG	$= R$
Сжатие сфероида PME	$= \delta$
Сжатие произвольного слоя FNG	$= \rho$
Ордината LN	$= q$
Отношение центробежной силы к тяжести на экваторе	$= \varphi$

Согласно § 23, выражение [конечной части] составляющей силы притяжения, направленной от N к C, есть:

$$\frac{4\pi}{r^2}\int Rr^2\,dr$$

Что же касается составляющей этой силы в направлении CV, равновеликой притяжению сфероида FNG по направлению, перпендикулярному к CN, то мы начнем вычисление ее с того, что предположим сфероид SIT однородным, с плотностью, равной единице. Согласно § 27, выражение составляющей притяжения сфероида по этому направлению есть

$$\frac{4\pi}{5}\frac{CI^5}{CN^5}\cdot CV$$

предполагая, что NV направлено по перпендикуляру к эллипсу, подобному SIT, проходящему через точку N.

Обозначая через ρ сжатие сфероида SIT и через r линии CS или CI, найдем, что выражение составляющей силы притяжения однородного сфероида на точку N, по направлению CV, есть

$$\frac{8\pi}{5}\frac{LN}{CN^5}\cdot r^5\rho$$

Заметив это, мы легко поймем, что слой $SsTt$ плотности 1, представляющий разность сфероида SIT и сфероида sit, сжатие которого равно $\rho + d\rho$, а полуось $r + dr$ будет притягивать точку N по направлению CV с силой

$$\frac{8\pi}{5}\frac{LN}{CN^5}\,d(r^5\rho)$$

Умножая эту величину на R и интегрируя, получим:

$$\frac{8\pi}{5}\frac{LN}{CN^5}\int R\,d(r^5\rho)$$

такова сила, действующая по направлению CV, с которой притягивает точку N сфероид SIT, не однородный, как мы предполагали сначала, но такой, который соответствует условиям задачи. Если в эту величину, вместо LN, подставим ее значение q и заменим CN на r, то

$$\frac{8\pi q}{5r^5}\int Rd\,(r^5\rho)$$

будет выражение той силы, с которой сфероид FNG действует на точку N в направлении CV, предполагая теперь, что количества r и ρ относятся к точке N, а не к точке I.

Обратимся теперь к силе, направленной тоже по CV и вызванной притяжением слоя $PEGF$. На основании § 54, мы найдем, что притяжение частицы N слоем $RrQq$ с плотностью, равной 1, будет

$$\frac{8\pi}{5} LN \cdot d\rho$$

где ρ — сжатие поверхности RQ, а $\rho + d\rho$ — сжатие поверхности rq. Следовательно, полагая плотность этого слоя равной R, получаем для силы, действующей по направлению CV, выражение

$$\frac{8\pi}{5} LN \cdot R \cdot d\rho$$

интеграл которого представит притяжение слоя $PEQR$. Но это притяжение уменьшается с увеличением r; поэтому, обозначая через F ту величину, в которую обращается $\int R d\rho$, когда r делается равным 1, мы найдем, что

$$\frac{8\pi}{5} \cdot LN \cdot \left(F - \int R\, d\rho\right)$$

выражает силу притяжения слоя $PEQR$ по направлению CV.

Следовательно, подставляя q вместо LN и предполагая, что величины r и ρ соответствуют точке N, а не точке H, найдем, что сила, направленная по CV и вызванная притяжением слоя $PEGF$, есть

$$\frac{8\pi}{5} q \cdot F - \frac{8\pi}{5} q \int R\, d\rho$$

Остается определить центробежную силу в точке N; ее выражение найдем так же, как в § 29; она равна $4\pi Aq\varphi$, где A означает величину, которую принимает $\int Rr^2\, dr$ при $r = 1$, так что притяжение на точку поверхности сферы есть $4\pi A$.

Но теперь, по условиям нашей задачи, требуется, чтобы составляющая силы притяжения сфероида по радиусу CN так относилась к составляющей по CV, как CN относится к CV, иными словами, как r к $2q\rho$; следовательно, здесь необходимо, чтобы имела место пропорция:

$$\frac{4\pi}{r^2}\int Rr\ dr : \left[\frac{8\pi}{5r^5} q \int R' d(r^5\rho) + \frac{8\pi}{5} qF - \right.$$

$$\left. - \frac{8\pi}{5} q \int R d\rho + 4\pi\, Aq\varphi \right] = r : 2q\rho$$

Но так как ордината q сама собой выпадает из этого равенства, то оно переходит в основное уравнение:

$$5r^2\rho \int Rr^2\, dr = \int Rd(r^5\rho) + Fr^5 + \frac{5}{2} A\varphi r^5 - r^5 \int R\, d\rho$$

Таким образом, если сжатие слоев ρ и плотность R связаны между собой этим уравнением и если ρ, по предположению, есть бесконечно малая величина, от $r = 0$ до $r = 1$, то каждый из слоев FNG в любой его точке будет пересекать направление силы тяжести под углом, отличающимся от прямого на величину второго порядка малости, предполагая при этом, что центробежная сила есть величина первого порядка малости по сравнению с тяготением. Следовательно, действительные кривые, представляющие собой, при всех наших допущениях, меридианы слоев FNG, отличаются только на бесконечно малые величины второго порядка от эллипсов, сжатие которых определяется предыдущим уравнением. Таким образом, если у какой-либо планеты центробежная сила очень мала по сравнению с тяготением, можно без какой-либо ощутимой погрешности применять предыдущие вычисления для определения ее фигуры.

Для того чтобы можно было воспользоваться нашим уравнением, необходимо предположить, что одна из обеих величин, именно R или ρ, задана как функция r, и искать другую при помощи этого уравнения; иными словами, можно либо задать сжатия, либо искать их значение, когда задана плотность

слоев; или обратно, искать плотность слоев, когда их сжатие предполагается известным [70].

§ 56

Исследование основного уравнения § 55, когда заданы плотности

Я начну с того, что продифференцирую уравнение § 55; это дает мне, после приведений:

$$\frac{r\,d\rho + 2\rho\,dr}{r^3\,dr}\cdot\int Rr^2\,dr = F + \frac{5}{2}A\varphi - \int R\,d\rho$$

Дифференцирую его второй раз, считая dr постоянным,* и получаю:

$$d^2\rho = \rho\,dr^2\left(\frac{6}{r^2} - \frac{2Rr}{\int Rr^2\,dr}\right) - \frac{2Rr^2\,dr}{\int Rr^2\,dr}\,d\rho$$

Полагая здесь

$$\rho = e^{\int u\,dr}$$

получаю:

$$du + u^2\,dr = -\frac{2ur^2\,Rdr}{\int Rr^2\,dr} + dr\left(\frac{6}{r^2} - \frac{2Rr}{\int Rr^2\,dr}\right)$$

Наконец, вводя еще обозначение

$$t = u + \frac{Rr^2}{\int Rr^2\,dr}$$

я нахожу:

$$dt + t^2\,dr = \frac{r^2\,dR}{\int Rr^2\,dr} + \frac{6dr}{r^2}$$

Отсюда видно, что основное уравнение § 55 представляет собой лишь частный вид знаменитого уравнения:

$$dy + y^2\,dx = X\,dx$$

* Старинное выражение, соответствующее современному „по независимой переменной r“ (*Ред.*)

где X — функция от x, для которого, насколько я знаю, никому еще не удалось произвести отделение переменных в общем случае. Поэтому, исключая только единственный частный вид его, когда

$$R = r^n$$

и когда упомянутое затруднение с этим уравнением не возникает, я не буду останавливаться на исследовании сжатий по заданным плотностям [71].

§ 57

Интегрирование предыдущего уравнения в предположении, что $R = r^n$, или определение фигуры сфероида и его слоев в случае, когда плотность пропорциональна любой степени расстояния от центра

Подставив в предыдущее уравнение вместо R функцию r^n, я привожу его к виду:

$$\frac{dt}{dr} + t^2 = \frac{n^2 + 3n - 6}{r^2}$$

оно делается однородным, если принять $1/r$ за новую переменную, и потому не представляет никаких трудностей.

Выполнив интегрирование, получаю:

$$t = \frac{2q+1}{2r} - \frac{2qar^{-2q-1}}{ar^{-2q}+1},$$

где

$$q = \sqrt{n^2 + 3n + \frac{25}{4}},$$

и a есть постоянная, введенная при интегрировании.

Подставив это значение t в то выражение

$$\frac{e^{\int t\, dr}}{\int Rr^2\, dr}$$

которое получается из обоих преобразований предыдущего параграфа, именно:

$$\rho = e^{\int u dr}, \quad u = t - \frac{Rr^2}{\int Rr^2 dr}$$

получаю:

$$\rho = a\delta r^{-n-\frac{5}{2}-q} + \delta r^{-n-\frac{5}{2}+q}$$

где δ — произвольная постоянная, полученная при интегрировании $\int t dr$.

Так как это значение ρ есть решение уравнения § 56 [стр. 171]

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{2Rr^2}{\int Rr^2 dr} \cdot \frac{d\rho}{dr} - \left(\frac{6}{r^2} - \frac{2Rr}{\int Rr^2 dr}\right)\rho = 0$$

то с помощью этого решения мы, разумеется, решим и уравнение § 55 [стр. 170]

$$5r^2\rho \int Rr^2 dr = \int Rd(r^5\rho) + Fr^5 + \frac{5}{2}A\varphi r^5 - r^5 \int R d\rho$$

для этого нужно только придать постоянным a и δ такие значения, чтобы члены с F и $\frac{5}{2}\varphi A$ уничтожились вместе с остальными при подстановке этого выражения ρ; но это условие требует только того, чтобы постоянные a и δ были связаны между собой уравнением

$$\delta \cdot \left(q - \frac{1}{2} - n\right) - a\delta \cdot \left(q + \frac{1}{2} + n\right) = \frac{5}{2}\varphi$$

Вернемся теперь к той проблеме, решение которой привело нас к основному уравнению § 55. Она состояла в данном случае в том, чтобы найти ту фигуру, которую должна принять жидкая сферическая масса радиуса 1, состоящая из бесконечного числа слоев, плотности которых на расстоянии r от центра определяются функцией $R = r^n$, если она вращается в такое

время, что центробежная сила на экваторе относится к силе тяжести, как $\varphi:1$. Легко видеть, что это должна быть фигура вполне определенная. Между тем, решая предыдущее уравнение, мы нашли бы бесконечное множество таких фигур, так как мы получили только одно уравнение для определения постоянных a и δ; поэтому одна из этих величин остается совершенно неопределенной в выражении ρ, т. е. в величине сжатия слоев сфероида.

Для того чтобы устранить это затруднение, тем более существенное, что оно не является особенностью нашего частного примера для закона плотностей, нужно восстановить в памяти, что предположения, на основе которых получено предыдущее решение, справедливы только при условии, что форма слоев очень мало отличается от сферической, так что ρ должно всегда быть весьма малой величиной. Замечая далее, что показатель n должен быть отрицательным для того, чтобы плотность уменьшалась от центра к поверхности, как этого требуют законы гидростатики, мы увидим, что из двух членов, входящих в выражение ρ, только второй соответствует нашей задаче, хотя они оба и удовлетворяют основному уравнению § 55. Действительно, у первого члена, именно

$$a\delta r^{-n-\frac{5}{2}-\sqrt{n^2+3n+\frac{25}{4}}}$$

показатель будет всегда отрицательный, так что этот член необходимо даст большую величину сжатия у слоев, близких к центру, и, следовательно, устранит возможность удовлетворить предыдущим условиям.

Отсюда вытекает, что постоянная a, появившаяся после первого интегрирования, должна быть положена равной нулю. Тогда найденное нами уравнение, связывающее a и δ, приведется к виду:

$$\delta\left(q-\frac{1}{2}-n\right)=\frac{5}{2}\varphi,$$

и с помощью его мы получим:

$$\rho = \frac{5\varphi}{2q-1-2n} \cdot r^{q-n-\frac{5}{2}}$$

Таково общее выражение для сжатия слоев; оно является определенным, так как постоянные n и φ заданы.

Способ, которым я здесь устранил затруднение, возникающее в силу двойного интегрирования второго уравнения § 56, остается тем же самым и в других частных случаях [72].

§ 58

Если бы было поставлено условие, что n должно быть положительным, т. е. чтобы плотности увеличивались от центра к поверхности (а это допустимо, конечно, если рассматривать задачу как чисто математическую), то и для этого случая только что найденное выражение ρ дает правильное решение, хотя оно и приводит к конечной величине сжатия слоев, близких к центру. Для того чтобы выяснить причину этого, заметим, что если указанное выражение ρ умножить на r, то произведение

$$\rho r = \frac{5\varphi}{2q-1-2n} \cdot r^{q-n-\frac{3}{2}}$$

которым выражается разность осей этих слоев, было бы всегда величиной весьма малой; таким образом, первые слои были бы очень малы по размерам, хотя и весьма сжаты; но так как плотность их, по нашему предположению, близка к нулю, то совершенно неважно, применимы ли к ним или нет те предположения, на основе которых вычисляется притяжение сфероидов; потому что, отбросив эти первые слои совершенно, мы не внесли бы заметной ошибки в определение осей сфероида.

§ 59

Исследование уравнения § 55, когда плотность R неизвестна, иными словами, способ определения закона плотностей, когда задан закон сжатий

Я возвращаюсь ко второму уравнению § 56 и представляю его в виде:

$$\frac{-r^2\,d^2\rho + 6\rho\,dr^2}{2r^2\,d\rho + 2r\,\rho\,dr} = \frac{Rr^2dr}{\int Rr^2dr}$$

Здесь левая часть есть известная функция от r, потому что, по условию задачи, сжатие ρ задано как функция r; полагая левую часть равной $P\,dr$, получаю для определения R уравнение:

$$P\,dr = \frac{Rr^2\,dr}{\int Rr^2\,dr}$$

а из него легко выводится выражение

$$R = \frac{P}{r^2}\,e^{\int P\,dr}$$

оно и даст нам искомую плотность R, как только будет сделано предположение о зависимости ρ от r и отсюда получена функция P.

§ 60

Если желательно применить изложенную теорию к планете, фигура которой определена из наблюдений и для которой центробежная сила известна, то по началу представляется достаточным принять для сжатия ρ такую функцию от r, которая превратится в наблюденное сжатие при $r = 1$, и подставить это выражение ρ в только что полученное (§ 59) общее выражение плотности R; однако, если мы обратим внимание на то, что это выражение R выведено только из того

уравнения (второго в § 56), которое само получилось после двух дифференцирований основного уравнения из § 55, и что при вторичном дифференцировании из него исчезла та постоянная, которая означала центробежную силу, то станет очевидным, что выражения R и ρ, удовлетворяющие второму уравнению § 56, не будут удовлетворять уравнению § 55, если только не оставить в выражении ρ произвольную постоянную. Эту постоянную можно будет определить затем из условия, что при подстановке R и ρ в основное уравнение § 55 все постоянные члены должны обратиться в нуль одновременно с другими.

Однако подстановка выражений R и ρ в уравнение § 55 могла бы потребовать весьма длинных вычислений; поэтому целесообразно искать такой метод определения произвольной постоянной, которую нужно ввести в выражение ρ, который дал бы уверенность в том, что все члены в уравнении § 55 уничтожатся, даже и не производя подстановки в него выражений R и ρ.

Для того чтобы найти этот метод, заметим прежде всего, что уравнение:

$$\frac{r\,d\rho + 2\rho\,dr}{r^3\,dr}\int Rr^2dr = F + \frac{5}{2}\,\varphi A - \int R\,d\rho,$$

полученное в § 56 после первого дифференцирования основного уравнения § 55, может соответствовать только тому самому сфероиду, которому принадлежит и уравнение § 55.

Затем необходимо обратить внимание на то, что в только что написанном уравнении количество $F - \int R\,d\rho$ должно обратиться в нуль при $r = 1$ и, кроме того, что при этом значении r интеграл $\int Rr^2dr$ обращается в A. При этих условиях легко видеть, что для определения произвольной постоянной, оставленной в выражении ρ, достаточно будет сделать так, чтобы количество

$$\frac{r\,d\rho + 2\rho\,dr}{r^3\,dr}$$

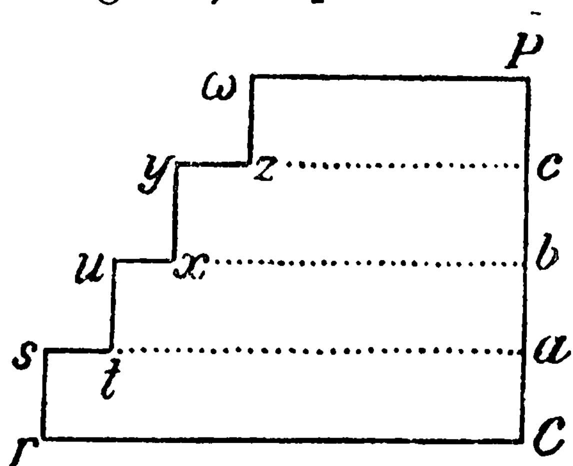
получило значение $\frac{5}{2}\varphi$ при $r=1$; достичь этого чрезвычайно просто.

Таким образом, если выражение, которое будет принято для ρ, будет удовлетворять этому условию и, к тому же, если оно примет значение наблюденного сжатия при $r=1$, то останется подставить это выражение в общую формулу для R, данную в предыдущем параграфе; и если окажется, что полученное таким образом значение R будет всегда положительным, а его разности всегда отрицательными для значений r между 0 и 1, то можно быть уверенным, что предположение, сделанное в отношении сжатия слоев планеты, соответствует как наблюдениям, так и законам гидростатики [73].

§ 61

Предполагая, что жидкий сфероид, состоящий из конечного числа слоев заданной плотности, вращается вокруг своей оси и находится в равновесии, найти его сжатие и сжатие всех его слоев

Эту задачу можно рассматривать как частный случай к § 55, и решение ее было бы найдено немедленно, если бы нам было известно общее решение основного уравнения этого параграфа; тогда здесь потребовалось бы только знать кривую или ступенчатую линию для плотностей. Действительно, предположим, что плотность от центра C до расстояния Ca [фиг. 54] выражается линией $Cr=sa$; от a до b — линией $at=ub$ и т. д.; в этом случае очевидно, что ломаная $rstuxyz\omega$ могла бы служить ступенчатой прямой, изображающей плотности; поэтому для решения поставленной здесь задачи мы могли бы воспользоваться ею совершенно так же, как и кривой плотностей в общем построении.



Фиг. 54.

Но так как у нас не имеется методов для общего решения основного уравнения § 55, то надо искать другие пути, на которых мы не были бы связаны этим уравнением. С этой целью мы примем сжатие каждого слоя за неизвестную и образуем столько конечных уравнений, сколько имеется неизвестных, пользуясь тем же методом, который был применен в § 55, для вывода основного уравнения.

Для того чтобы пояснить применение этого метода, обозначим здесь через:

φ — отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе;
$a, b, c, \ldots z$ — полуоси всех слоев;
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \zeta$ — их сжатия;
$A, B, C, \ldots Z$ — их плотности;
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{y}$ — количества, на которые плотность каждого слоя превосходит плотность следующего.

Допустим, что требуется составить то уравнение, которое происходит от слоя, полуось которого есть n; мы найдем:

1) что величина, которая в § 55 была обозначена через $\int Rr^2\,dr$, теперь получит значение:

$$\frac{1}{3}N(n^3-m^3)+\frac{1}{3}M(m^3-l^3)+\ldots+\frac{1}{3}Aa^3$$

для сокращения я обозначу ее через [N];

2) что величина, которую мы обозначали через $F-\int Rd\rho$, теперь будет:

$$O(\omega-\nu)+P(\pi-\omega)+\ldots+Z(\zeta-\upsilon)$$

3) что величина интеграла $\int Rd(r^5\rho)$ будет:

$$N(n^5\nu-m^5\mu)+M(m^5\mu-l^5\lambda)+\ldots+Aa^5\alpha$$

4) что величина, обозначенная через $\frac{5}{2}A\varphi$, равна

$$\frac{5}{2}\varphi\frac{[Z]}{z^3}.$$

Отсюда следует, что вместо уравнения (§ 55):

$$5r^2\rho\int Rr^2\,dr=\frac{5}{2}A\varphi r^5+Fr^5-r^5\int Rd\rho+\int Rd(r^5\rho)$$

мы получим теперь уравнение:

$$5n^2\nu\,[N]=\frac{5}{2}\varphi\frac{[Z]}{z^3}n^5+$$

$$+n^5[O(\omega-\nu)+P(\pi-\omega)+\ldots+Z(\zeta-v)]$$

$$+N(n^5\nu-m^5\mu)+M(m^5\mu-l^5\lambda)+\ldots+Aa^5\alpha$$

Оно легко преобразуется в следующее:

$$5\nu\frac{[N]}{n^3}=\frac{5}{2}\varphi\frac{[Z]}{z^3}+\nu\mathrm{n}+\omega\mathrm{o}+\ldots v\mathrm{y}+\zeta Z$$

$$+\frac{1}{n^5}(m^5\mu m+l^5\lambda\mathrm{l}+\ldots a^5\alpha\mathrm{a})$$

Теперь не представит труда образовать, соответственно этому уравнению, и те, которые принадлежат другим слоям, после чего останется только найти из них неизвестные α, β и т. д., и задача будет решена.

Все вычисления, необходимые для этого решения, можно значительно сократить. Для этого возьмем уравнение, которое принадлежит слою, лежащему под слоем, только что рассмотренным; оно будет иметь вид:

$$5\mu\frac{[M]}{m^3}=\frac{5}{2}\varphi\frac{[Z]}{z^3}+\mu\mathrm{m}+\nu\mathrm{n}+\ldots+\upsilon\mathrm{y}+\zeta Z$$

$$+\frac{1}{m^5}(l^5\lambda\mathrm{l}+\ldots+a^5\alpha\mathrm{a})$$

Вычитая это уравнение из предыдущего, найдем:

$$5\nu\frac{[N]}{n^3} = 5\frac{[M]}{m^2} - m\mu\left(\frac{n^5 - m^5}{n^5}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{n^5} - \frac{1}{m^5}\right)\cdot(l^5\lambda\,\mathrm{l} + k^5\varkappa\,\mathrm{k} + \ldots)$$

Вместе с другими уравнениями, которые составляются подобным же образом, оно позволит нам весьма просто определить отношения α к β, затем к γ, к δ и т. д. Действительно, составим, соответственно этому уравнению, то, которое принадлежит слою с полуосью b; мы получим:

$$5\beta\frac{[B]}{b^3} = 5\alpha\frac{[A]}{a^3} - a\alpha\left(\frac{b^5 - a^5}{b^5}\right);$$

из него мы найдем отношение β к α.

Точно так же, образовав уравнение, которое соответствует слою с полуосью c, мы получим отношение γ к α и точно так же для других слоев.

Как только будут получены выражения $\beta, \gamma, \delta\ldots$ через α, нам останется только определить α, а это легко будет сделать, применив только одно из уравнений того вида, который был дан выше, именно:

$$5\nu\frac{[N]}{n^3} = \frac{5}{2}\varphi\frac{[Z]}{z^3} + \ldots + \text{и т. д.}$$ [74]

§ 62

Из уравнения (§ 61):

$$5\nu\frac{[N]}{n^3} = 5\mu\frac{[M]}{m^3} + \ldots + \text{и т. д.}$$

вытекает довольно замечательное предложение, именно:

Отношение сжатия какого-либо слоя к сжатиям всех слоев, под ним лежащих, не изменится, если снять все

верхние слои и заменить их любым числом других слоев, плотности и радиусы которых взяты произвольно [75].

§ 63

Из того же самого уравнения (§ 61) можно вывести еще, что *сжатия слоев должны возрастать от центра к поверхности*, предполагая при этом все время, что плотности уменьшаются, как этого требуют законы гидростатики.

Для того чтобы установить это положение, я приведу уравнение § 61 к виду:

$$\frac{\nu}{\mu}-1=\left(\frac{2}{3}+\frac{m^5}{n^5}-\frac{5m^3}{3n^3}\right)\frac{\mathrm{m}}{5[\mathrm{N}]}\cdot n^3$$
$$+\left(\frac{\lambda l^5}{\mu n^5}-\frac{\lambda l^5}{\mu m^5}-\frac{5l^3}{3n^3}+\frac{5}{3m^3}\right)\frac{1}{5[\mathrm{N}]}\cdot n^3$$
$$+\left(\frac{\varkappa k^5}{\mu n^5}-\frac{\varkappa k^5}{\mu m^5}-\frac{5k^3}{3n^3}+\frac{5k^3}{3m^3}\right)\frac{\mathrm{k}}{5[\mathrm{N}]}\cdot n^3$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и я замечаю, что количества:

$$\frac{2}{3}+\frac{m^5}{n^5}-\frac{5m^3}{3n^3}$$

$$\frac{\lambda l^5}{\mu n^5}-\frac{\lambda l^5}{\mu m^5}-\frac{5l^3}{3n^3}+\frac{5l^3}{3m^3}\ \text{и т. д.}$$

должны быть непременно положительными, если только $n>m>l>k$ и т. д. Отсюда легко видеть, что если $\mu>\lambda>\varkappa$ и т. д., то ν будет по необходимости больше μ. Поэтому достаточно установить, что $\beta>\alpha$, чтобы притти к убеждению, что $\beta<\gamma<\delta$ и т. д.

Но то, что $\beta>\alpha$, легко усмотреть из уравнения:

$$\frac{\beta}{\alpha}-1=\left(\frac{2}{3}+\frac{a^5}{b^5}-\frac{5}{3}\frac{a^3}{b^3}\right)\frac{\mathrm{a}\,b^3}{5[\mathrm{B}]}$$

Следовательно, и т. д. [76].

§ 64

Приложение решения предыдущей задачи к сфероиду, состоящему из двух жидкостей различной плотности

Допустим, что первоначально обе эти жидкости были соединены вместе в одну сферу, причем более плотная находилась в центральной части, а вторая составляла ее сферическую оболочку, в виде сферического слоя. Пусть:

a — радиус сферы, образованной более плотным веществом
$1 + \text{a}$ — его плотность
1 — радиус всей сферы
1 — плотность слоя.

Когда центробежная сила приведет жидкую массу к той форме, которую требуют условия равновесия, то сжатие всего сфероида и сжатие внутреннего сфероида будут иметь значения [77]:

$$\beta = \frac{5\varphi(1 + a^3 \text{a}) \cdot (5 + 2\text{a} + 3a^5 \text{a})}{(10 + 4\text{a}) \cdot (2 + 5a^3 \text{a}) - 18a^5 \text{a}}$$

$$\alpha = \frac{25\varphi(1 + a^3 \text{a})^2}{(10 + 4\text{a}) \cdot (2 + 5a^3 \text{a}) - 18a^5 \text{a}}$$

§ 65

Пределы сжатия планет в предположении, что они были первоначально жидкими

Предыдущая теория не может быть согласована с наблюдениями иначе, как при условии, что величина сжатия, получаемая из наблюдений, не превосходит известных пределов. Действительно, если мы допустим, что планета первоначально состояла только из жидкости, она не может быть ни более сжатой, чем в случае, когда она однородна, ни менее сжатой, чем в том случае, когда тяготение увлекает все тела к одному

центру с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния до этого центра.

То обстоятельство, что планеты не могли бы быть более сжатыми, чем в случае однородности, следует из того, что у неоднородных планет слои более плотные должны быть и самыми близкими к центру. Но, на основании § 63, из этого вытекает, что сжатия слоев увеличиваются от центра к поверхности, а это условие в свою очередь, согласно § 38, требует, чтобы планета была менее сжата, чем если предполагать ее однородной.

Что же касается второго утверждения, именно, что планеты не могут быть менее сжатыми, чем в случае, когда притяжение увлекает все тела к центру с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, то его основание состоит в том, что такое допущение равносильно предположению, что всё вещество планеты сосредоточено в ее центре; но такое строение планеты есть как бы предельное при всех возможных допущениях об увеличении плотностей от поверхности к центру [78].

§ 66

Будем попрежнему предполагать планеты первоначально жидкими и неоднородными. В этом случае очевидно: *1) что тяжесть на поверхности должна убывать от полюса к экватору на величину бо́льшую, чем в случае однородности, и 2) что это уменьшение пропорционально квадрату косинуса широты.*

§ 67

Согласно § 49 тяжесть на полюсе превосходит тяжесть на экваторе на величину $2\varepsilon - \delta$, где δ — сжатие планеты, а ε — сжатие той же планеты в предположении, что она однородна.

Глава V

Сравнение предыдущей теории с наблюдениями

§ 68

Об уменьшении тяжести от Севера к Югу

В предыдущей главе (§ 66) мы установили, что если предположить неоднородность строения сфероида, то уменьшение тяжести от полюса к экватору должно быть на нем больше, чем на однородном сфероиде. Из этого следует, что если моя теория применима к Земле, то уменьшение тяжести от полюса к экватору должно быть или равно 1/230, или же больше этой величины, но никак не меньше ее, потому что, согласно § 21, отношение силы тяжести на экваторе к силе тяжести на полюсе должно быть равно 230:231, если предположить, что Земля однородна.

Это заключение, выведенное из моей теории, вполне согласуется с тем, что нам дает опыт. Действительно, при наблюдениях силы тяжести, произведенных либо путем непосредственного измерения длины секундного маятника, либо путем сравнения хода тех же самых часов в местах Земли под различными широтами, всегда обнаруживалось, что уменьшение силы тяжести от севера к югу больше, чем оно было бы, если бы общее уменьшение тяжести от полюса к экватору составляло 1/230-ую.

§ 69

О сжатии Земли

Если мы предположим, как в предыдущей главе, что Земля была первоначально жидкой, то, как это видно из § 65, отношение осей никогда не может быть больше 230:231, потому что именно это значение было получено для однородной Земли (§ 20); но так как измерения силы тяжести не позво-

ляют нам считать, что все части Земли обладают одинаковой плотностью, то необходимо, чтобы ее сжатие было меньше 1/230-й.

Далее, если даже и не ограничиться предположением, что распределение внутренних частей Земли есть то, которое эти части приняли бы сами собой, если бы они были некогда жидкими, а вместо этого допустить наибольшую возможную общность в изменениях плотностей и отношений осей слоев [от центра до поверхности], — как мы это сделали в главах III и IV, — то и тогда легко убедиться, что отношение осей и в этом случае должно быть меньше 1/230; действительно, из § 50 известно, что если задано полное уменьшение силы тяжести от полюса до экватора, то достаточно вычесть его величину из 1/115-й, чтобы найти сжатие. Но так как, по всем наблюдениям, уменьшение тяжести превышает 1/230-ю, то нужно, чтобы сжатие было меньше этой величины, так что отношение осей должно быть меньше 230:231.

Однако с этим выводом из моей теории дело обстоит отнюдь не так, как в отношении силы тяжести (§ 68); сравнение длины градуса меридиана, измеренного нами на Севере, с длиной градуса, определенной во Франции, дало для отношения осей значение 177:178, т. е. бо́льшее, чем 230:231, вместо того, чтобы получиться меньше этого отношения, как это следовало бы.

Так как измерения на Севере были произведены с большой точностью и с большим вниманием, то на первый взгляд кажется, что результатам этих измерений надо отдать предпочтение перед выводами из моей теории. Однако, если мы примем во внимание ошибки, неизбежные при фактических измерениях, а также и пределы этих погрешностей, то мы увидим, что, не опорачивая наших измерений, их можно приблизить к моей теории и получить согласный с нею результат.

Действительно, произведя необходимые вычисления, мы найдем, что достаточно уменьшить разность длины градусов

в Париже и в Торнео на 60 туазов, чтобы получить отношение осей, равное 230:231. Но стóит только представить себе, что такое 60 туазов при двух операциях, требующих столько астрономических и географических наблюдений, чтобы допустить возможность погрешности даже несколько бóльшей, чем 60 туазов, не опорачивая ни измерений на Севере, ни измерений г-на Пикара; но тогда теория и наблюдения придут в согласие.

Предположим, например, что разность длины градуса меридиана в Париже и в Торнео была найдена большей, чем следовало, на 80 туазов; тогда для разности осей Земли получим приблизительно отношение 1/260 и, вычитая эту дробь из 1/115-й, найдем 1/206-ю для уменьшения тяжести от полюса к экватору, в достаточно хорошем согласии с наблюдениями, произведенными во Франции и в Лапландии с прекрасными часами г-на Грэгама.

К тому же, хотя ошибки, которые надо было бы предположить в наблюдениях, чтобы согласовать их с моей теорией, достаточно малы, я вовсе не утверждаю здесь, что эти ошибки в действительности содержатся в наблюдениях; это мы сумеем проверить только при помощи тех измерений, получение которых из Перу теперь ожидается: значительная разница между длиной дуги меридиана в Кито (Перу) и в Торнео доставит нам единственную возможность решить, имеет ли отношение земных осей величину бóльшую или меньшую, чем 230:231.

Когда речь идет о том, чтобы доказать сжатие Земли, то измерение длины градуса меридиана в Торнео и в Париже больше чем достаточно; но если требуется получить верное значение этого сжатия, то его можно вывести только из сравнения длины градуса в местах, возможно более удаленных друг от друга.

Как только величина сжатия будет найдена, и если она окажется при этом меньше, чем 1/230-я, то, на основании всего предыдущего, не представит труда построить такие

гипотезы о внутреннем строении Земли, которые будут соответствовать как теории, так и наблюдениям, и притом независимо от предположений о том, была ли Земля первоначально жидкой или нет.

Но если сжатие Земли оказалось бы неоспоримо бóльшим 1/230-й, то я признàю, что не только пришлось бы отказаться от теории, изложенной в этой второй части моей книги, но что вообще будет затруднительно согласовать измерения длины маятника с градусными измерениями в системе всемирного тяготения. Я нахожу даже возможным утверждать, что если это и удастся, то только ценой применения гипотез, весьма мало вероятных [79].

§ 70

О сжатии Юпитера

Если предположить, что все вещество, из которого состоит Юпитер, бесконечно разрежено по сравнению с той его частью, которая находится в центре этой планеты, или — что то же самое — если ввести условие, что все части Юпитера друг друга не притягивают, а влекутся только к центру планеты, то очевидно, что отношение центробежной силы к притяжению на экваторе Юпитера составит 1:11.615, как было найдено в § 22 по формуле $T^2 : h^3 t^2$. Действительно, в этом предположении сила притяжения на экваторе Юпитера должна относиться к силе, с которой эта планета действует на спутника, как квадрат расстояния спутника к квадрату экваториального радиуса Юпитера; отсюда вытекало бы, что центробежная сила на экваторе Юпитера относится к силе тяжести на экваторе в совместном отношении кубов расстояния спутника к радиусу Юпитера и квадратов времен обращения спутника к обороту Юпитера.

Заметив это, легко найти, каково должно быть отношение осей Юпитера при сделанном допущении об его строении. Для этого достаточно обратиться к § 29 первой части, и мы най-

дем, что полуось этой планеты относится к экваториальному радиусу, как 23.23 к 24.23.

Но если, вместо того чтобы предполагать всю материю Юпитера сосредоточенной в центре, мы допустим, что эта планета однородная, то, как мы видели в § 22, отношение осей должно быть $90^1/_2$ к $100^1/_2$. Поэтому, согласно § 65, для того чтобы наблюдения соответствовали моей теории, необходимо, чтобы сжатие Юпитера, выведенное из наблюдений, было заключено в пределах между 1/23 и 1/9; но так оно и есть в действительности, ибо из превосходных наблюдений г-д Кассини и Паунда следует, что отношение осей Юпитера заключается между 13/14 и 10/11.

Таким образом, изложенная нами теория находится уже в соответствии и с маятниковыми измерениями силы тяжести и с наблюденным сжатием Юпитера; если, кроме, этого, геодезические измерения, которые мы ожидаем от перуанской экспедиции, дадут, по сопоставлении их с нашими измерениями в Лапландии, для сжатия Земли величину меньшую, чем 1/230-я, то эта теория получит подтверждение во всей возможной полноте, так что закон всемирного тяготения, уже столь прекрасно согласующийся с движениями планет, окажется в таком же соответствии и с фигурами этих небесных тел [[80]].

ПРИЛОЖЕНИЯ

Даламбер

ИЗВЛЕЧЕНИЕ ИЗ МЕМУАРА „О РАВНОВЕСИИ ЖИДКОСТЕЙ“*

. . . .
. . . .

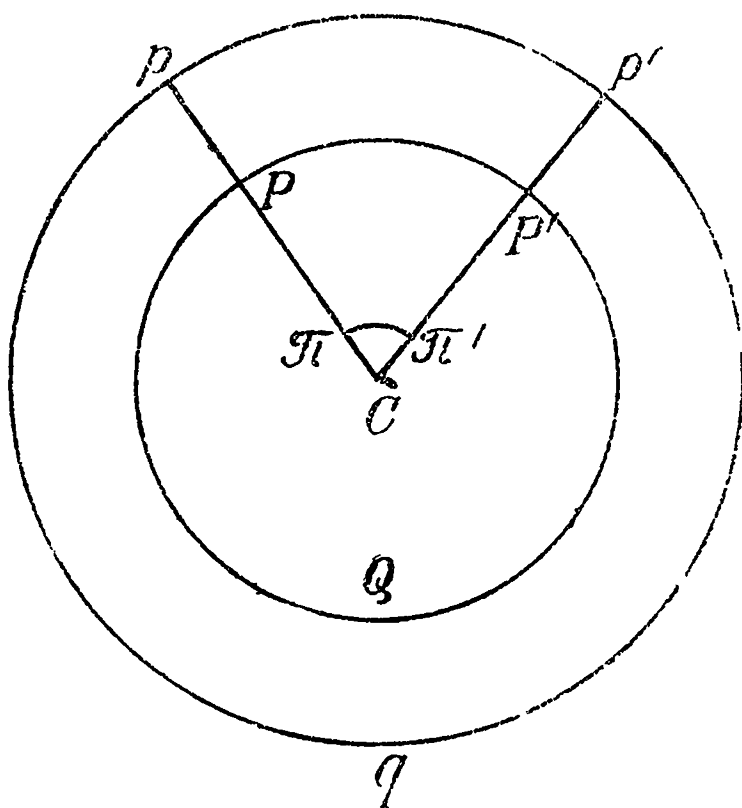
18. Следует иметь в виду, что в случае жидкостей, состоящих из слоев постоянной или переменной плотности, должен быть равен нулю интеграл $\int \pi\, dz$, взятый по всему слою одинаковой плотности, обозначая через π силу, действующую по направлению слоя, а через dz — элемент слоя. Поэтому сила π должна быть такой, что, полагая $z = 360°$, должны иметь $\int \pi\, dz = 0$; в общем случае, если плотность δ неодинакова во всех точках слоя, то должно быть $\int \delta \pi\, dz = 0$. Это несколько ограничивает предположения относительно величины вертикальной и горизонтальной силы, но не настолько, чтобы обязательно сделать слои уровенными [82].

19. Замечание о том, что интеграл $\int \pi\, dz$ должен необходимо быть равным нулю при $z = 360°$, очень важно. Если его не учитывать, можно часто впасть в ошибку относительно законов равновесия жидкостей. Для того чтобы пояснить это на очень простом примере, я рассмотрю однородную жидкую

---

* D'Alembert. Extrait du mémoire „Sur l'équilibre des fluides“. Opusc. Mathém., vol. V, 1768, p. 10—22 [81].

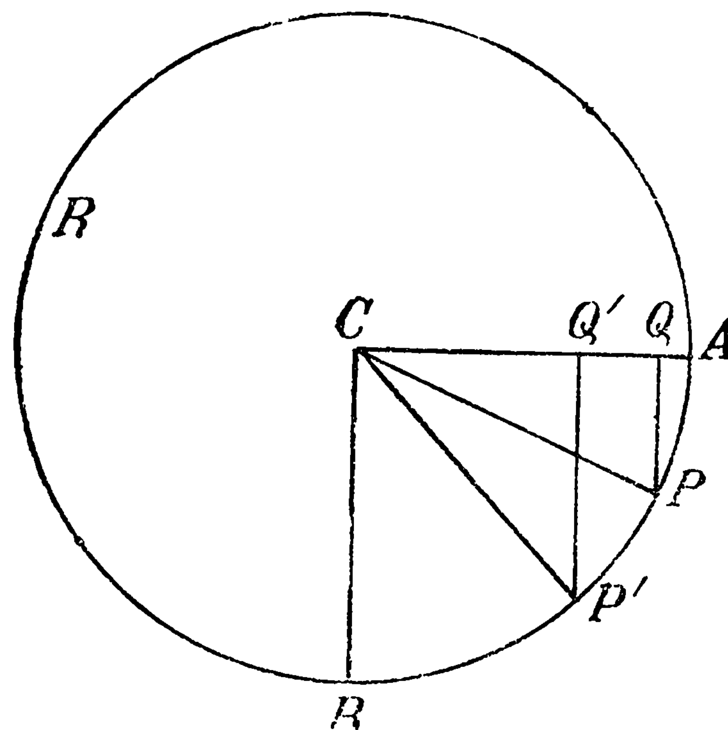
массу сферической формы, заключенную в сосуде; пусть частицы ее притягиваются к центру C [фиг. 1] с силой, пропорциональной произвольной функции расстояния, и, кроме того, пусть они находятся под действием сил, перпендикулярных радиусам Cp, CP и по величине обратно пропорциональных длине этих радиусов. Совершенно очевидно, что каналы PP' и pp' будут в равновесии, так же как и каналы Pp и $P'p'$, так что произвольно заданный канал $PP'p'p$ будет в равновесии. Между тем, полный круговой канал $PP'QP$ не будет в равновесии, потому что от P к P' и к Q будет непрерывный ток жидкости вследствие постоянной силы, действующей перпендикулярно к CP.



Фиг. 1.

20. Из этого видно также, что хотя бы канал $PP'p'p$ был в равновесии, но канал PCP', примыкающий к центру, не будет в равновесии; это может показаться некоторым парадоксом. Г-н Клеро в его „Теории фигуры Земли“, в § 45 первой части, исследуя случай, в известном отношении подобный этому, повидимому, заключает, на основании равновесия любого канала $PP'p'p$, о равновесии канала PCP'; это происходит потому, — говорит он, — что усилие, действующее по направлению кругового канала $\pi\pi'$, будет всегда одно и то же, как бы мала ни была протяженность канала; таким образом, по его мнению, оно должно иметь ту же величину и в точке C, где длина канала равна нулю. Признаюсь, я не могу допустить такого утверждения; правда, г-н Клеро добавляет, чтобы подкрепить это соображение, что сила, приложенная к капле в точке C, бесконечна, будучи обратно пропорциональной радиусу; но мне кажется, что как только мы достигнем центра C,

то больше не существует вообще никакой силы. Далее, эта сила, действующая, по предположению, перпендикулярно к радиусу, должна была бы в центре C действовать по всевозможным направлениям одновременно, потому что все направления исходят из центра. Но такое бесконечное множество возможных направлений представляется мне лишенным смысла [choquant]. Впрочем, не должно казаться удивительным, что сила, действующая вдоль канала $\pi\pi'$, сохраняющая постоянное значение, пока PP' не равно нулю, исчезает, как только $\pi\pi'=0$. Здесь происходит то же самое, что и в уравнении гиперболы $xy=a^2$; здесь площадь xy постоянна, пока x не равно нулю, и, очевидно, обращается в нуль, когда $x=0$ [83].



Фиг. 2.

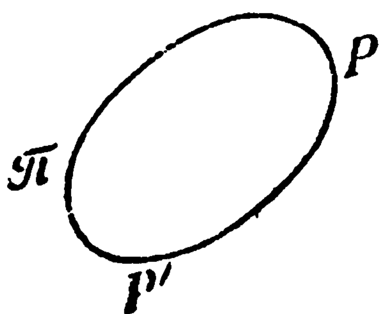
21. Вот еще второе следствие, не менее важное, вытекающее из нашего замечания о том, что $\int \pi\, dz$ при $z=360°$ должен обязательно быть равен нулю. Пусть сила, перпендикулярная к CP, есть $\frac{A}{CP}$, где A постоянная, и $r=CP$ [фиг. 2]. Введем координаты $y=CQ$ и $x=QP$; пусть, далее, сила, действующая по направлению PC, есть функция φ от радиуса r; тогда сила, действующая по направлению QP, будет

$$\frac{Ay}{r}+\varphi(r)\frac{x}{r}$$

а сила по направлению QC:

$$-\frac{Ax}{r}+\varphi(r)\frac{y}{r}$$

Умножив первую из этих сил на dx, а вторую на dy и сложив, легко увидим, что сумма будет полным дифференциалом, и, следовательно, согласно принципу г-на Клеро (§ 16 части первой его книги), здесь должно было бы иметь место равновесие. Между тем, на основании п. 19 очевидно, что равновесия здесь не будет. Значит, г-н Клеро высказал правило равновесия в слишком общей форме, когда он утверждал, что если P — сила параллельная оси y, а Q — сила параллельная оси x, то равновесие будет иметь место, если $P\,dy + Q\,dx$ будет полным дифференциалом.



Фиг. 3.

22. Но мне могут возразить: каким образом это правило может оказаться слишком общим? Действительно, если $P\,dy + Q\,dx$ есть полный дифференциал, то вес любого канала PP', очевидно, зависит только от положения точек P и P'; следовательно [фиг. 3], любой канал PP', $P\pi P'$, кончающийся в точках P, P', будет иметь один и тот же вес, а, значит, вся масса жидкости будет в равновесии [84].

23. На это я отвечаю, что интеграл от $P\,dy + Q\,dx$ может оказаться таким, что у него будет несколько значений, соответствующих одним и тем же значениям координат x и y, подобно тому, как на окружности мы имеем несколько дуг, соответствующих одним и тем же значениям синуса и косинуса. В этом случае может оказаться, что вес каналов PP' и $P\pi P'$ направлен так, что жидкость PP' действует в сторону PP', а жидкость $P'\pi P$ по направлению $P'\pi P$, т. е. в том же направлении, как по PP' [фиг 3]; но тогда равновесия существовать не может. Как раз этот случай имеет место здесь. Интеграл от

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{r}\,\varphi(r + \frac{A\cdot(y\,dx - x\,dy)}{r^2}$$

равен

$$\psi(r) + A\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

где

$$\psi(r)=\int\varphi(r)\,dr$$

Следовательно, вес $P'P$ [фиг. 2] равен $A\cdot(AP'-AP)$, или же $A(AP'+360^\circ-AP)$. Из этих двух величин первая представляет собой вес дуги PP', вторая — ее дополнения до 360°.

24. То же самое имело бы место, даже если бы дуга APB [фиг. 2] не была дугой окружности, ни A величиной постоянной, лишь бы только сила, перпендикулярная к CP, была всегда равна $\frac{A}{r}$, где A — произвольная функция величины

$$\int\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$$

или, что то же самое, — функция угла, тангенс которого есть y/x [85].

25. Поэтому заметим, что для равновесия недостаточно, чтобы $P\,dy+Q\,dx$ было полным дифференциалом; необходимо еще, чтобы интеграл от этого выражения не зависел ни от спрямления, ни от квадратуры овальной кривой; иначе может случиться, что любой замкнутый канал не будет в равновесии и что в этом канале будет непрерывный ток жидкости [86].

26. Из всего сказанного мы должны заключить еще, что уравнение

$$\int R\,dr+\int Tr\,d\theta-\frac{fz^2}{2}=A$$

выведенное г-ном Клеро в § 43 первой части его книги для равновесия сфероидов (причем r обозначает длину радиусов, выходящих из неподвижной точки, а θ — углы между этими радиусами), должно быть таково, что в нем

$$\int Tr\,d\theta=0$$

не только когда угол θ равен нулю, но и когда этот угол равен 360° или любому кратному от 360°; к тому же, не вызывает сомнений, что радиус r и ордината z принимают одни и те же значения для любого значения угла θ, увеличенного на 360° и повторенного сколько угодно раз; поэтому, очевидно, что $\int Tr\,d\theta$ должен сохранять то же самое значение, каково бы ни было число полных окружностей, на которые мы увеличим θ. Точно так же, и даже с бо́льшим правом, мы можем утверждать, что и функция T должна сохранять свое значение при увеличении θ на кратное от 360°. Но следует отметить, что это второе условие может иметь место без первого; так будет, например, если

$$T = \frac{a + b\sin\theta}{r}$$

и вообще если T — ордината кривой, абсцисса которой есть $\int r\,d\theta$ и которая, наподобие циклоиды и бесконечного множества других кривых, которые можно вообразить, пересекает ось в бесконечном числе точек, но не имеет ветвей попеременно под и над осью. Но оба условия будут выполнены одновременно, если Tr — ордината кривой, абсцисса которой есть $\int y\,d\theta$ (y — постоянный параметр) и у которой имеются подобные и равные ветви, попеременно расположенные над и под осью. Этого легко достигнуть путем спрямления или квадратуры замкнутой кривой, как в задаче о колебаниях струны (об этом в Мемуарах Берлинской Академии за 1747 г.) [87].

27. Но даже и с тем ограничением, что $\int Tr\,d\theta = 0$ при $\theta = 360°$, я сомневаюсь, чтобы уравнение

$$\int R\,dr + \int Tr\,d\theta - \frac{fz^2}{2} = A$$

могло служить выражением настоящего равновесия, если Tr — функция θ, а R — функция r; действительно, в этом случае

прямолинейные каналы, примыкающие к центру, не будут в равновесии, потому что, согласно сказанному выше, в этих прямолинейных каналах $\int Tr\,d\theta = 0$, так что одновременно будут иметь место два уравнения:

$$\int R\,dr + \int Tr\,d\theta - \frac{fz^2}{2} = A$$

для криволинейного канала, идущего от центра к поверхности, и уравнение

$$\int R\,dr - \frac{fz^2}{2} = A$$

для прямолинейных каналов, заканчивающихся в центре.

28. Следовательно, для равновесия необходимо, чтобы $\int Tr\,d\theta$, выражающий вес кругового канала, заключенного между прямолинейными каналами CP и CP', был равен нулю, когда $CP = 0$, иными словами, требуется, чтобы интеграл $\int Tr\,d\theta$, взятый при переменном θ и постоянном r, был равен нулю при $r = 0$ или, наконец, что то же самое, чтобы $Tr\,d\theta$ не содержало ни одного члена, в который входило бы θ, но не входил бы r. Отсюда следует, что $R\,dr + Tr\,d\theta$ будет иметь тот же интеграл, как $R\,dr$ при постоянном θ в выражении R. Следовательно, необходимо, чтобы R было функцией θ и r, обладающей следующими свойствами: 1-е. Проинтегрировав $R\,dr$ при переменном r и постоянном θ, затем продифференцировав этот интеграл, считая переменным только θ, мы должны получить величину, равную $Tr\,d\theta$. 2-е. Величина $Tr\,d\theta$ не должна содержать ни одной отрицательной степени r, потому что иначе $\int Tr\,d\theta$ не будет равен нулю при $r = 0$. 3-е. Этот интеграл, предполагаемый равным нулю при $\theta = 0$, должен быть равен нулю, если увеличить θ на 360°, повторенное столько раз, сколько это будет нужно [88].

29. Итак, пусть имеем произвольную функцию от r и от синуса или косинуса θ, в которой могут оказаться члены, содержащие r без θ, но не будет ни одного, содержащего θ без r, и ни одного, содержащего отрицательные степени r, по крайней мере среди членов с θ. Допустим, что эта функция продифференцирована и дифференциал ее есть $M\,dr + N\,d\theta$; положим $R = M$ и $T = N/r$. При этих условиях уравнение

$$\int R\,dr + \int Tr\,d\theta - \frac{fz^2}{2} = A$$

будет действительно выражать закон равновесия.

30. Функции $R = r\,\theta^2$, $T = r\,\theta$

или

$$R = \frac{\theta}{\sqrt{a^2 + r\theta}}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r\theta}}$$

которые приводит г-н Клеро в § 45 первой части его книги, удовлетворяют первому и второму из трех условий, данных нами в п. 28; но эти выражения не удовлетворяют третьему. Надо было взять, например,

$$R = r\sin^2\theta, \qquad T = \frac{1}{2}\,r\sin 2\theta$$

или

$$R = \frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2 + r\sin\theta}}, \qquad T = \frac{\cos\theta}{\sqrt{a^2 + r\sin\theta}}$$

соответственно этому в других случаях...[89].

Даламбер

„О ФИГУРЕ ЗЕМЛИ“ *

1. Покойный г-н Маклорен дал первое строгое доказательство теоремы о том, что однородная вращающаяся жидкая масса должна принять форму эллипсоида, если допустить, что притяжение действует обратно пропорционально квадрату расстояний. Но, насколько я знаю, никто не заметил еще до сих пор, что эта задача допускает два решения; так что здесь могут существовать две эллипсоидальные фигуры, которые будут обе в равновесии. Этот вопрос и рассматривается в настоящем исследовании.

2. Пусть дана твердая однородная сфера радиуса R; ее масса равна $4\pi R^3/3$, притяжение на точку на ее поверхности есть $4\pi R/3$.

3. Допустим теперь, что эта сфера вращается вокруг одного из ее диаметров; центробежную силу на экваторе можно положить тогда равной $\frac{4\pi R}{3}\cdot\varphi$, где φ — известное число, зависящее от скорости вращения.

4. Предположим далее, что этот твердый и однородный шар становится жидким; он примет, как известно, форму эллипсоида; пусть b — малая полуось этого эллипсоида и радиус его экватора $a = mb$.

---

* D'Alembert. Sur la figure de la Terre. Opusc. Mathém., vol. VI, 1773, p. 47—67 [90].

Для притяжения на полюсе, которое я называю P, мы имеем выражение:

$$P = \frac{4\pi m^2 b}{(m^2-1)^{3/2}}\left[(m^2-1)^{1/2} - \operatorname{arc\,tg}(m^2-1)^{1/2}\right]$$

Эта формула дана г-ном Маклореном в его труде о „Приливах и отливах моря“, г-ном Клеро в его „Теории фигуры Земли“ и в других работах; ее нетрудно получить различными способами.

5. Таким образом, полагая

$$m^2 = 1 + l^2$$

найдем, что притяжение на полюсе есть

$$P = \frac{4\pi b(1+l^2)}{l^3}(l - \operatorname{arc\,tg} l)$$

6. Точно так же для притяжения на экваторе, которое я обозначаю E, имеется выражение:

$$E = \frac{2\pi b(1+l^2)^{3/2}}{l^3}\left(\operatorname{arc\,tg} l - \frac{l}{1+l^2}\right)$$

Его тоже можно найти в указанных работах [91].

7. Наконец, центробежная сила на экваторе, которую я называю F, есть, очевидно:

$$F = \frac{4\pi R}{3}\varphi \cdot \frac{mb}{R} = \frac{4\pi\varphi}{3} b\sqrt{1+l^2}$$

8. Для равновесия необходимо, как показал г-н Маклорен и после него г-н Клеро (в § 9 второй части его книги), чтобы имело место уравнение:

$$P - m(E - F) = 0 \qquad \text{(A)}$$

9. Отсюда вытекает следующая пропорция:

$$\frac{2\sqrt{1+l^2}}{l^3}(l-\operatorname{arc\,tg} l):\left[\frac{1+l^2}{l^3}\operatorname{arc\,tg} l-\frac{1}{l^2}-\frac{2\varphi}{3}\right]=\sqrt{1+l^2}:1$$

или иначе:

$$2(l-\operatorname{arc\,tg} l)=(1+l^2)\operatorname{arc\,tg} l-l-\frac{2\varphi}{3}l^3$$

Таково уравнение, служащее для определения значений l, удовлетворяющих поставленной задаче.

10. Прежде всего из него видно, что если l имеет несколько вещественных и положительных значений, то правая часть его будет положительной, так как $l-\operatorname{arc\,tg} l$ всегда положительно, потому что тангенс угла всегда больше самого угла. Поэтому притяжение на экваторе

$$E=2\pi b\frac{(1+l^2)^{3/2}}{l^3}\operatorname{arc\,tg} l-2\pi b\frac{(1+l^2)^{1/2}}{l^2}$$

будет больше, чем центробежная сила на экваторе, т. е. чем

$$F=\frac{4\pi b\varphi}{3}(1+l^2)^{1/2}$$

Таким образом, планета не рассеется, и равновесие ее удержится, если только l будет иметь вещественные и положительные значения, а соотвествующие значения m будут определены выражением $\sqrt{1+l^2}$.

11. Нет даже оснований опасаться, что внутри сфероида притяжение на экваторе будет меньше, чем центробежная сила. Действительно, пусть x — расстояние произвольной точки до центра; сила тяжести в этой точке, если она находится в экваториальной плоскости, есть

$$\frac{(E-F)x}{mb}$$

и, следовательно, она будет положительной до тех пор, пока

$$E>F$$

12. Итак, остается только исследовать, может ли l иметь несколько вещественных значений в уравнении (А).

13. Из уравнения, данного в п. 9, следует, что

$$\frac{2\varphi l^3}{3} = (3\,l + {}^2)\,\mathrm{arc\,tg}\,l - 3l$$

или

$$2\varphi = \frac{(9 + 3l^2)\,\mathrm{arc\,tg}\,l - 9l}{l^3} \qquad \text{(B)}$$

Если мы предположим, что l очень мало́, то

$$\mathrm{arc\,tg}\,l = l - \frac{1}{3}\,l^3 + \frac{1}{5}\,l^5 \text{ и т. д.}$$

Отсюда, подставив в (В), найдем после приведений:

$$2\varphi = \frac{4l^2}{5} \text{ и т. д.}$$

(все прочие члены содержат l в степенях, бо́льших второй). Поэтому, если предположить φ конечной величиной, сколь угодно малой, то левая часть предыдущего уравнения, именно 2,φ больше правой, не только если $l = 0$, но даже если l очень мало́ [92].

14. Предположим теперь, что $l = \infty$ и, следовательно, $\mathrm{arc\,tg}\,l = \frac{\pi}{2}$. Тогда правая часть уравнения (В) будет $\frac{\pi}{2l}$, т. е. она равна нулю при $l = \infty$ и меньше левой части.

15. Таким образом, левая часть уравнения (В), т. е. 2φ, больше правой как при $l = 0$, так и при $l = \infty$.

Отсюда легко заключить, что если заданное значение 2φ меньше наибольшего значения правой части предыдущего уравнения, то найдутся, по крайней мере, два значения l, дающие решение нашей задачи; таким образом, в этом случае для сфероида будут возможны два состояния равновесия.

17. Но для того чтобы правая часть уравнения (В) имела максимальное значение, необходимо, чтобы производная от выражения

$$\frac{(3 + l^2)\,\mathrm{arc\,tg}\,l - 3l}{l^3}$$

равнялась нулю. Иными словами, нужно, чтобы было

$$\frac{3+l^2}{(1+l^2)l^3}+\operatorname{arc\,tg} l\cdot\left(-\frac{1}{l^2}-\frac{9}{l^4}\right)+\frac{6}{l^3}=0$$

откуда получается условие:

$$\operatorname{arc\,tg} l=\frac{7l^3+9l}{(1+l^2)(9+l^2)} \qquad (C)$$

18. В этом уравнении (C), которым определяется максимум ординаты, абсцисса l обязательно будет вещественной. Действительно, мы показали выше, что эта ордината равна $4l2/5$ при бесконечно малом l и что она равна нулю при $l=\infty$. Отсюда ясно, что кривая касается оси l в начале координат и что эта же ось будет ее асимптотой; следовательно, на этой кривой несомненно будет точка, где касательная параллельна оси и где ордината имеет максимум.

19. Это положение может быть доказано еще следующим образом.

Если l мало́, то

$$\operatorname{arc\,tg} l=l-\frac{1}{3}l^3+\frac{1}{5}l^5-\ldots$$

и выражение

$$\frac{7l^3+9l}{(1+l^2)(9+l^2)}=\frac{7l^3+9l}{9\left(1+\frac{l^2}{9}\right)(1+l^2)} \qquad (*)$$

превратится в

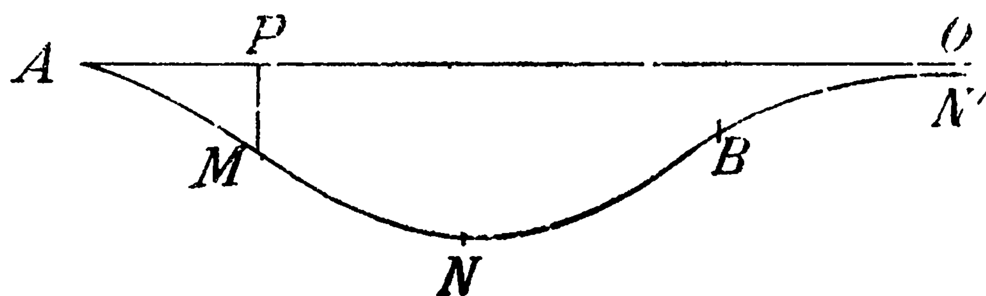
$$\left(l+\frac{7l^3}{9}\right)(1-l^2+l^4)\left(1-\frac{l^2}{9}+\frac{l^4}{81}\right)=l-\frac{1}{3}l^3+\frac{7}{27}l^5 \text{ и т. д.}$$

Отсюда ясно (так как $^7/_{27}>{}^1/_5$), что при очень малых l ордината, определяемая выражением (*), больше ординаты $\operatorname{arc\,tg} l$ для одной и той же абсциссы l. Но при $l=\infty$, $\operatorname{arc\,tg} l$ — конечная величина, равная $\pi/2$, а выражение (*) равно нулю.

Отсюда видим, что кривая с абсциссой l и ординатой (*) сначала отстоит от общей оси дальше, чем кривая с абсцис-

сой l и ординатой $\operatorname{arc}\operatorname{tg} l$, а затем подходит ближе к оси, так что первая кривая обязательно пересекает вторую. Следовательно, уравнение (С) будет иметь по крайней мере один вещественный и положительный корень l.

20. Из всего сказанного следует, во-первых, что кривая с абсциссой l и ординатой, изображающей правую часть уравнения (В), будет приблизительно такого вида, как изображенная на фиг. 1, где AP есть абсцисса l, а PM — ордината. Эта кривая касается в точке A оси AO; эта же ось AO будет ее асимптотой; поэтому ордината будет, очевидно, иметь макси-



Фиг. 1.

мум в некоторой точке N; кроме того, точку перегиба в некоторой другой точке M перед N и вторую точку перегиба где-то в B после N.

21. Что касается кривой с абсциссой l и ординатой, изображающей правую часть уравнения (С):

$$\frac{7l^3 + 9l}{(1 + l^2)(9 + l^2)}$$

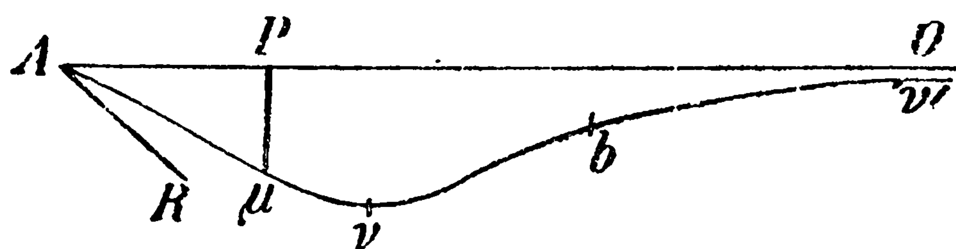
то она будет приблизительно такой формы, как показано на фиг. 2; она пересекает в точке A ось AO под углом в 45°, и асимптотой ее тоже является ось AO. Так как значение этой ординаты при малых l есть

$$l - \frac{1}{3} l^3 + \frac{7}{27} l^5 - \ldots$$

то очевидно, что кривая сначала проходит ниже касательной AM, так что сначала она направлена вогнутостью к оси. Поэтому она может и не иметь точки перегиба между началом A и ее

максимумом ν; но у нее необходимо будет точка перегиба b между точкой ν и бесконечно удаленной точкой ν'.

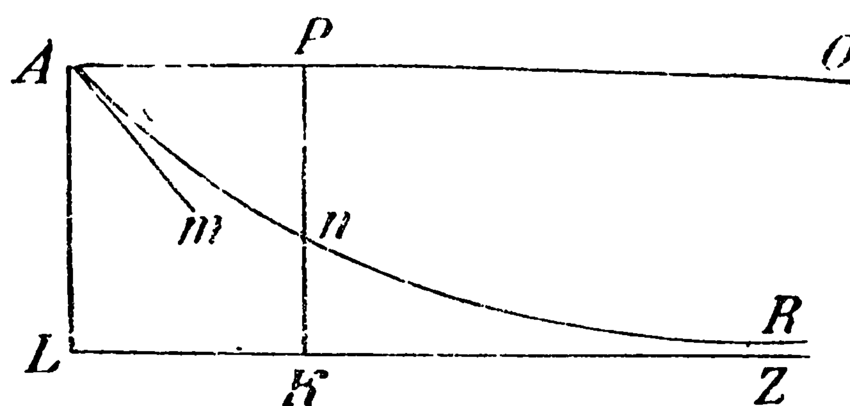
22. Наконец, кривая с абсциссой l и ординатой $\operatorname{arc}\operatorname{tg} l$ будет иметь приблизительно такую форму, как показано на фиг. 3; она пересекает сначала ось в точке A под углом



Фиг. 2.

45°, затем проходит ниже касательной Am в начальной точке A и имеет асимптотой прямую LZ, параллельную AO на расстоянии $AL = \frac{\pi}{2}$.

23. К тому же, из доказанного в п. 19 следует, что эта кривая AnR около начала A проходит ниже кривой $A\mu\nu'$, изображенной на фиг. 2, т. е. ближе к оси AO.



Фиг. 3.

24. Найдя оба значения l (п. 16), мы сможем определить большую полуось a и малую полуось b, заметив, что масса жидкости, имеющая форму сферы, равна $4\pi R^3/3$ и что масса эллиптического сфероида есть

$$\frac{4\pi}{3} a^2 b = \frac{4\pi}{3} b^3 (1 + l^2)$$

а, следовательно,

$$b^3 = \frac{R^3}{1+l^2}$$

или приближенно $b^3 = R^3$, если l очень мало́, или $b^3 = R^3/l^2$, если l очень велико́ [93].

25. Далее, так как 2φ можно предположить равным $4l^2/5$ (по п. 13), если 2φ мало́, то $l^2 = \frac{5}{2}\varphi$. Но в этом случае

$$b = \frac{R}{(1+l^2)^{1/3}}$$

и, следовательно,

$$m = \sqrt{1+l^2} \simeq 1 + \frac{l^2}{2} = 1 + \frac{5}{4}\varphi$$

Это совпадает с известным положением о том, что в однородном сфероиде с малым сжатием избыток экваториального радиуса над полуосью равен $\frac{5}{4}\varphi$, где φ есть отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе.

26. Если 2φ равно наибольшему значению выражения

$$\frac{(3l^2+9)\operatorname{arc\,tg} l - 3l}{l^3} \qquad (**)$$

то задача о равновесии жидкой массы имеет только одно решение, так как в этом случае оба значения l становятся равными. Когда же 2φ больше наибольшего значения выражения (**), наша задача вовсе не имеет решения.

Но так как уравнению (С, п. 17) удовлетворяет то значение l, при котором правая часть уравнения (В), п. 13, достигает своего наибольшего значения, то, подставляя выражение arc tg l из (С) в уравнение (В) и произведя упрощения, найдем, что наибольшее значение φ определяется равенством:

$$\varphi_0 = \frac{6l_0^2}{(1+l_0^2)(9+l_0^2)} \qquad (D)$$

Величина l_0 в правой части и есть та самая, которая удовлетворяет уравнению (C) [94].

27. Будет ли жидкость в равновесии или нет, в обоих случаях (если только предполагать, что фигура сфероида есть эллипсоид вращения) нетрудно убедиться, что избыток тяжести столба, идущего к полюсу, над тяжестью экваториального столба равен

$$\frac{Pb}{2}-\frac{(E-F)\,mb}{2}$$

где

$$mb=a$$

Следовательно, столб, направленный к полюсу, будет сильнее* экваториального, если

$$P>m(E-F)$$

и он будет легче его в противном случае.

Но, ввиду п. 5 и следующих, мы находим:

$$P-m(E-F)=\left[\frac{2\varphi}{3}-\frac{(3+l^2)\operatorname{arctg} l-3l}{l^3}\right]\cdot 2\pi\, bm^2 \qquad \text{(E)}$$

Правая часть этого уравнения обращается в нуль, когда l удовлетворяет уравнению (B, п. 13). Выражение в правой части (E) сначала положительно, пока l очень мало́, потому что при малых l оно (по п. 13) приближенно равно $2\varphi-4l^2/5$. Затем оно обращается в нуль, когда l принимает значение, равное первому корню уравнения (B, п. 13); потом оно становится отрицательным, затем опять обращается в нуль, когда l делается равным второму корню этого уравнения; после чего опять становится положительным.

28. Отсюда следует, во-первых, что если взять l немного меньше, чем меньший корень l_1 уравнения (B, п. 13), иными словами, меньше обоих значений l, соответствующих условию равновесия, то столб, направленный к полюсу, будет сильнее*

* „La colonne du pole sera plus forte...“.

экваториального. Во-вторых, если возьмем, напротив того, l немного больше, чем это меньшее значение l_1, то полярный столб будет легче экваториального [95].

29. Следовательно, если жидкость находится в равновесии, и при этом l имеет свое меньшее значение l_1, и если мы сколь угодно мало растянем сфероид [вдоль оси вращения], то полярный столб, ставший более длинным, будет своим весом превосходить экваториальный; поэтому он будет поднимать экваториальный столб, так что равновесие будет стремиться восстановиться. Точно так же, если мы возьмем l немного больше этого меньшего корня l_1, то полярный столб, длина которого уменьшится, будет слабее экваториального, и экватор будет стремиться опуститься, т. е. равновесие восстановится.

30. Наоборот, если мы возьмем l сколь угодно меньше, чем бо́льший корень l_2 уравнения (B п. 13), то полярный столб, ставший длиннее, будет слабее экваториального, который будет стремиться уменьшиться, и нарушенное равновесие не восстановится. Точно так же, если возьмем l сколь угодно больше наибольшего из указанных значений l_1 и l_2, то полярный столб, ставший короче, будет более сильным и будет стремиться еще укоротиться, так что равновесие и в этом случае не восстановится.

31. Мы видим, таким образом, что разница в обоих найденных нами случаях равновесия состоит в том, что в первом из них равновесие прочное [ferme], а во втором оно таковым не является [96].

32. Если 2φ равно наибольшему возможному значению правой части уравнения (B, п. 13), то, как легко видеть, если мы возьмем l немного больше или немного меньше того значения (l_0), при котором достигается этот максимум, то выражение

$$P - m\,(E - F)$$

стоящее в правой части уравнения (E, п. 27), будет в обоих случаях положительно. Отсюда получается тот странный

результат, что если мы положим l немного меньше значения l_0, о котором идет речь, то равновесие восстановится само собой; наоборот, оно вовсе не восстановится, если мы возьмем l немного больше l_0. Таким образом, если мы как угодно мало вытянем сфероид, он вернется в прежнее положение, а если мы его сожмем сколь угодно мало, равновесие не восстановится [97].

33. Как бы то ни было, окажется ли равновесие прочным или нет, оба случая равновесия от этого не менее возможны, и оба они соответствуют фигуре равновесия жидкой и однородной Земли. Действительно, достаточно предположить, что жидкость затвердела; тогда в обоих случаях направление тяжести будет перпендикулярно к поверхности во всех ее точках, и тела на поверхности сфероида останутся в покое: условие, единственно необходимое в этом случае для фигуры Земли.

34. Все это приводит меня к убеждению — будь сказано мимоходом, что до сих пор в теориях, предложенных по фигуре Земли, уделяли, быть может, слишком много внимания тому, чтобы согласовать между собой оба начала: именно принцип перпендикулярности направления силы тяжести к поверхности и начало равновесия столбов. Но это последнее необходимо только для жидкой Земли; однако оно никогда не является достаточным, будь Земля жидкая или твердая; напротив того, первый принцип необходим в обоих случаях и достаточен, если Земля твердая.

35. Легко видеть, что чем меньше величина 2φ [уравнение B, п. 13], тем сильнее будут отличаться друг от друга оба значения l, соответствующие равновесию, так что меньшее значение l_1 будет тем меньше, а большее l_2 тем больше, чем меньше φ. Это легко доказать, представив себе на фиг. 1 прямую, параллельную оси AO, на расстоянии 2φ от оси; эта прямая пересекает, очевидно, кривую AMN' в двух точках, которые и дадут оба искомые значения l и которые будут тем дальше расположены друг от друга, чем меньше расстояние 2φ от этой прямой по параллельной ей оси AO.

36. Отсюда вытекает тот странный парадокс, что если φ очень мало́, иными словами, если вращение Земли в ее первоначальном сферическом состоянии очень медленно, то сфероид может быть или очень мало или же очень сильно сжатым, причем в обоих случаях он будет в равновесии. Однако можно было бы думать, что хотя φ и очень мало́, вращение на экваторе все-таки может быть очень быстрым у очень сжатого сфероида, потому что экваториальный радиус его очень велик. Для того чтобы выяснить это, найдем величину скорости вращения.

37. Заметим, прежде всего, что если φ очень мало́, то второе значение l очень велико, так что для этого корня l уравнения (В, п. 13) мы имеем приближенное равенство:

$$\frac{2\varphi}{3}=\frac{\operatorname{arc\,tg} l_2}{l_2}, \qquad \text{или} \qquad \frac{2\varphi}{3}=\frac{\pi}{2l_2}$$

откуда

$$l_2=\frac{3\pi}{4\varphi} \tag{*}$$

центробежная сила на экваторе равна

$$\frac{4\pi}{3}\varphi a=\frac{4\pi}{3}\varphi b\sqrt{1+l_2^2}$$

или приближенно

$$\frac{4\pi}{3}\varphi\, bl_2$$

Отсюда квадрат [линейной] скорости на экваторе есть

$$\frac{4\pi\varphi}{3}a^2=\frac{4\pi\varphi}{3}b^2l_2^2$$

Пусть R — радиус сферы, по объему равный эллипсоиду, так что (как и в п. п. 24—25):

$$R^3=a^2b=b^3(1+l^2)$$

откуда приближенно

$$b=Rl_2^{-2/3}$$

и, следовательно, квадрат скорости на экваторе:

$$\frac{4\pi\varphi}{3} R^2 l_2^{2/3}$$

Подставляя значение (*) для l_2, найдем

$$\frac{4\pi\varphi}{3} a^2 = R^2 \pi^{1/3} \left(\frac{4\pi\varphi}{3}\right)^{1/3}$$

Таким образом, квадрат скорости на экваторе сфероида будет всегда величиной очень малой, так как, по предположению, φ очень мало́. Этим можно подтвердить (если бы была в том необходимость) положение, которое мы доказали строго и в общем виде в п. 10, именно, что ни в каком случае планета не рассеется от избытка центробежной силы по сравнению с силой тяжести. Во всяком случае, если φ очень мало́, то центробежная сила на экваторе сфероида хотя и очень мала, но все же значительно больше, чем центробежная сила на экваторе сферы, именно

$$\frac{4\pi R^2}{3} \varphi$$

потому что $\varphi^{1/3}$ в этом случае значительно больше, чем φ.

38. Так как задача, о которой здесь идет речь, всегда имеет два решения, как бы мало́ ни было φ, — решения, из которых одно дает очень малое значение l, а второе очень большое, то сначала нам представляется, что и при $\varphi = 0$, т. е. когда жидкость не вращается, тоже существуют две возможные фигуры равновесия; именно, одна для $l = 0$ и вторая для $l = \infty$; из них первая есть сфера, а вторая — бесконечно сжатый сфероид. Действительно, здесь создается впечатление, что уравнение (B, п. 13) имеет место при $l = \infty$ и $\varphi = 0$, так как обе части уравнения обращаются в нуль. Между тем, такое решение было бы фиктивным, потому что мы имеем уравнение

$$2\varphi l^3 = (3l^3 + 9) \operatorname{arc\,tg} l - 9l$$

при $\varphi = 0$ его левая часть равна нулю, даже если считать ι бесконечным, а правая часть при l бесконечном делается бесконечно большой. Таким образом, это уравнение имеет место, пока φ не равно нулю в полной точности, а l не равно бесконечности; но оно теряет смысл, когда $\varphi = 0$ и $l = \infty$. К тому же легко видеть, что случай $l = \infty$ есть просто иллюзия: 1) потому что говорить о сфероиде бесконечно сжатом или совершенно сплющенном в круг — бессмысленно и 2) потому что в этом случае притяжение на полюсе в точности и в полной строгости равно нулю, тогда как притяжение на экваторе нулю не равно; между тем, из пропорции, данной в п. 9, по-видимому, следует, что отношение притяжения на полюсе к притяжению на экваторе получается равным бесконечности, потому что отношение этих притяжений есть $\sqrt{1+l^2}$, т. е. бесконечно велико [98].

39. Если бы кривая, ординату которой мы определили в п. 19 выражением

$$\frac{7l^3+9l}{(9+l^2)(1+l^2)} \qquad (*)$$

пересекала кривую с ординатой $\operatorname{arc\,tg} l$ больше чем в одной точке, то у кривой, соответствующей уравнению (B, п. 13), с ординатой

$$\frac{(9+3l^2)\operatorname{arc\,tg} l - 9l}{l^3} \qquad (**)$$

имелась бы больше чем одна точка, в которой касательная была бы параллельна оси. Этот случай, пожалуй, и стоил бы изучения; но я предоставляю его исследование другим геометрам, так как оно привело бы меня к вычислениям более длинным, чем трудным. К тому же, мало вероятно, чтобы такой случай мог иметь место. Действительно, кривая с ординатой (*) сначала проходит дальше от оси, чем кривая с ординатой $\operatorname{arc\,tg} l$, но на бесконечности эта кривая приближается к оси; отсюда следует, что если бы она пересекала кривую (**) больше чем в одной точке, то она пересекала бы ее по

меньшей мере три раза. Следовательно, у кривой с ординатой (**) имелись бы в таком случае по меньшей мере три точки, где касательная была бы параллельна оси. Поэтому прямая, проведенная параллельно оси, на расстоянии 2φ, могла бы пересечь кривую (**) в четырех точках; это зависело бы только от заданного значения 2φ; первая из этих точек соответствовала бы прочному равновесию, вторая — непрочному, третья прочному, последняя непрочному. Все это легко следует из предыдущей теории. Но, повторяю еще раз, очень мало вероятно, чтобы такой случай мог иметь место; поэтому мы на нем не остановимся [99].

40. Если в основном уравнении (B), п. 13,

$$2\varphi\, l^3 = (3l^2 + 9)\operatorname{arc\,tg} l - 9l$$

мы положим $l = 0$, то получим $0 = 0$, каково бы ни было φ. Отсюда, казалось бы, должно следовать, что l может равняться нулю, а m может равняться 1, при любой скорости вращения; или иначе, что жидкая масса может сохранять сферическую форму и быть в состоянии равновесия, с какой бы скоростью она ни вращалась. Но это невозможно. Чтобы разрешить этот парадокс, вернемся снова к уравнению

$$2\varphi = \frac{(3l^2 + 9)\operatorname{arc\,tg} l - 9l}{l^3}$$

Мы видели выше, что если l очень мало́, числитель правой части равен $4l^5/5$, так что вся правая часть равна $4l^2/5$. Отсюда ясно, что, при $l = 0$, 2φ не может быть равно $4l^2/5$, если только само φ не равно нулю.

Причина кажущегося парадокса, приводящего здесь к тождеству $0 = 0$ при $l = 0$, заключается в том, что правая часть уравнения равна $4l^5/5 + \rho$, если l равно нулю или бесконечно малой величине; таким образом

$$2\varphi\, l^3 = \frac{4l^5}{5} + \rho$$

где ρ — малая величина порядка выше l^5. Поэтому истинное значение 2φ с большой точностью равно $4l^2/5$. Так как l^3 — общий множитель обеих частей уравнения, то на него нужно их разделить, чтобы получить 2φ. Вообще, если $x = y^m$, то $xy^k = y^{m+k}$, и по началу кажется, что, так как при $y = 0$ обе части уравнения обращаются в нуль, то x может быть равен какой угодно величине; тогда как в действительности $x = y^m$ и, следовательно, $x = 0$ при $y = 0$. Мне казалось необходимым сделать это замечание, потому что оно может быть полезным и в других случаях.

ДВА ПИСЬМА ВОЛЬТЕРА

1. Письмо к Клеро*

Из замка Ферней, 27 августа 1759.

Ваше письмо, Милостивый Государь, доставило мне столько же удовольствия, сколько работа Ваша внушила мне к Вам уважения. Эта война с математиками по поводу кометы** представляется мне битвой богов на Олимпе, тогда как на земле собаки дерутся с кошками. Я потрясен громадностью Вашего труда. Я припоминаю, что в давние годы, когда я работал над Ньютоном, то всегда, прекращая занятия, чувствовал себя как бы больным; у меня органы прилежания и усвоения не столь хороши, как у Вас: Вы родились математиком, тогда как я стал последователем Ньютона только в силу случайностей. Ваша последняя работа должна несомненно принести честь Франции; ведь невозможно, чтобы всё было сказано одними англичанами. Ньютон обосновал свои законы частично на законах Кеплера; но Вы внесли теперь добавление в законы Ньютона. То, что Вам удалось установить неравенства, которые притяжение больших планет вызывает в движениях комет, есть нечто изумительное. Эти светила, которых наши отцы и древние знали только под прозвищем волосатых, соответственно этимологии слова, — так же как мы теперь говорим про Клодиона-Волосатого,*** — теперь

* Oeuvres complètes de Voltaire, éd. F. Didot, 1843, vol, XII, 24.

** Об этой работе Клеро см. ниже, стр 242—244.

*** Предводитель одного из франкских племен, участвовавший в неудачных войнах с Римом в V в. н. э. (*Ред.*).

подчинены Вашим вычислениям, в той же мере, как и светила солнечной системы; но нужно было бы быть чересчур упрямым, чтобы требовать предвычисления возвращения кометы с точностью до минуты, подобно тому, как вычисляют наперед затмения Солнца или Луны. Приходится довольствоваться приближенностями на этих огромных расстояниях, и при том сплетении причин, которые могут ускорить или замедлить возвращение кометы. К тому же разве массы Юпитера и Сатурна могут быть определены с точностью? Это представляется мне невозможным. Мне думается, что если Вам предоставят один льготный месяц на возвращение кометы — так же, как это делается для векселей, поступающих издалека, — то этим Вам отнюдь не окажут большого снисхождения; но когда станут признавать, что Вы — это честь Франции и человеческого разума, то этим только справедливость будет Вам отдана.

Было бы угодно Богу, чтобы наш друг Моро́ Мопертюи занимался, так же как и Вы, своими науками и предсказывал одни лишь возвращения комет, вместо того чтобы экзальтировать свою душу для предсказаний будущего, или предлагать вскрывать мозги гигантов, чтобы познать природу души, или натирать людей смолой, чтобы исцелять их от всяких болезней, или преследовать Кенига, и умереть между двумя капуцинами.

Еще одно: меня огорчает, что Вы называете „ньютоньянцами“ тех, кто признает истину открытий Ньютона; это всё равно, что называть геометров „эвклидианцами“... Да благословит Бог типографа, который напечатал „альтеркации“ кометы вместо „альтерации“.*

Он проявил тут больше мудрости, чем сам предполагал. Всякая истина вызывает „альтеркации“. И я тоже со своей стороны мог бы быть в обиде на тех, кто называл меня плохим гражданином тогда, когда я первый во Франции изложил

* Altercations — пререкания, жаркие споры; alterations — изменения (здесь в отношении движения кометы). (*Ред.*).

с ясностью систему англичанина Ньютона; однако по иным поводам я испытал столько несправедливостей, что эта обида затерялась в их толпе. Но, наконец-то, я пришел к тому, что измеряю только те кривые, которые мои новые сеялки вычерчивают концами их лопаток. В результате получается немного пшеницы. Когда же я убивался в Париже, сочиняя эпические поэмы, трагедии, составляя истории, я пожинал только плевелы. Труд на полях более сладок, чем занятия словесностью, и я нахожу больше здравого смысла у моих землепашцев и виноградарей, чем у тех писак, которые вынудили меня отказаться от Парижа и не дают мне возможности об этом сожалеть.

Я провожу на практике то, что советует Друг Людей. Я делаю добро в моих землях, другим и самому себе. Я вызываю к жизни немного изобилия в стране, самой приятной, но и самой бедной, какую я когда-либо видал. Ведь это превосходные физические опыты — выращивать четыре колоса там, где природа давала только два. Академии Цереры и Помоны сто́ят всех других.

Счастлив, кто мог познать явлений причины...
Счастлив и тот, кто узнал бога полей...

Виргилий, Георгики, кн. II, V, 490, 493.

2. Письмо к де-Варенну

(приемщику поземельного налога в Монтаржи) *
(1765 г.)

Г-н Клеро не имел, Милостивый Государь, никакого отношения к философии Лейбница, в которую г-жа дю-Шатлэ внесла столько же ясности, сколько сам Лейбниц навел на нее темноты. Она привела ее даже к такой ясности, что почти у всех читателей раскрылись глаза на лейбницевы фантазии.

* Oeuvres, t. XII, p. 575.

Иначе обстояло дело с алгебраическим комментарием к Ньютону. Так как здесь речь шла только об истинах, г-жа дю-Шатлэ совещалась с Клеро; он проверял все вычисления; он много работал с ней; однако ей одной принадлежит слава работы над переводом ньютоновых „Начал", а этот труд был бы почетным и для академика. Я нашел у себя копию письма, которое я послал Клеро несколько лет тому назад; отправляю ее Вам, она может найти место в примечаниях к Вашей работе. Это и есть то самое письмо, на которое Вы ссылаетесь в Вашем последнем письме; оно будет служить по крайней мере доказательством той дружбы, которая меня связывала с знаменитым Клеро. Эта дружба была лестной для меня, и я не предполагал пережить его. Мы понесли тяжелую утрату. Однако публика ее недостаточно ощущает; она не отдает себе отчета, как немногочисленны выдающиеся люди в этой области. Мы знаем не больше трех-четырех математиков-астрономов; если бы они отошли, все были бы поражены узнать, что нет никого, кто сумел бы сделать наблюдение. На тысячу человек, читающих общую прессу [les feuilles publiques], найдется всего один, поучающийся по работам Клеро. Меня очень интересует памятник, который Вы ему воздвигаете; он заслужил, чтобы Вы говорили о славе его.

Н. И. Идельсон

А. КЛЕРО И ЕГО „ТЕОРИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ“

„Из того, что в Лейпцигских Ученых Известиях пишут про сочинение г-на Клеро о Фигуре Земли, заключаю я, что эта книга должна быть превосходная...“

Христиан Гольдбах к Леонарду Эйлеру, из Москвы, 1 июня 1744 г.

„Теория фигуры Земли“ г-на Клеро есть действительно произведение несравненное как в отношении глубоких и трудных вопросов, которые в ней рассматриваются, так и в отношении того удобного и легкого способа, посредством которого ему удается совершенно ясно и отчетливо изложить предметы самые возвышенные...“

Леонард Эйлер к Христиану Гольдбаху, из Берлина, 4 июля 1744 г.*

I

Книга Клеро под заглавием „Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики“, опубликована в Париже в 1743 г. Год достопамятный в анналах физико-математических наук, так как тогда же в Париже, у того же королевского печатника Жана-Батиста Коньяра (J. B. Coignard), была издана, и в той же книжной лавке, что под вывеской „Золотое Перо“

* Corr. Math. et Phys., par N. Fuss, 1843, t. I, p. 277 et 292.

на улице Сен-Жак, была выпущена в продажу не менее знаменитая книга под длинным титулом: „Трактат по динамике, в котором законы равновесия и движения тел приводятся к наименьшему возможному числу и доказываются новым способом и где дается новый принцип для определения движения тел, действующих друг на друга каким угодно образом“. То был один из первых трудов молодого Даламбера. Ее автору минуло тогда, в 1743 г., двадцать шесть лет, а Клеро ровно тридцать; первыми они начали говорить во Франции языком новой науки — науки Ньютона, — иными словами, прилагать методы анализа бесконечно малых к задачам механики, к проблемам движения небесных тел и к теории образования их фигур; и, несомненно, они положили этим начало всей французской математической школе второй половины XVIII и начала XIX в., в которой блистали имена Лапласа, Лагранжа, Лежандра, Пуассона и многих других. Однако значение того нового принципа, который Даламбер высказал в несколько туманной форме на страницах своего Трактата, было окончательно раскрыто и обосновано только через несколько десятилетий, именно в 1788 г., в „Аналитической механике“ Лагранжа. Между тем, книга Клеро от самого ее появления и вплоть до наших дней остается одним из тех редких произведений физико-математического цикла, где за старинными обозначениями и терминами содержится окончательное решение, в строгих пределах поставленной точности, четко отграниченной и притом труднейшей проблемы, — решение, сохранившее свое теоретическое и практическое значение на все времена. Не существует курса по теории фигуры планет или по высшей геодезии, где бы десятки раз не говорилось про теоремы Клеро, про дифференциальное уравнение Клеро, определяющее строение вращающейся неоднородной жидкой планеты, — уравнение, выведенное из самых условий ее равновесия. Нет ничего удивительного поэтому, что „проблема Клеро“ явилась впоследствии предметом исследований и развития со стороны таких математиков, какими были Лаплас, Пуанкарэ и Ляпунов.

Почти в те самые годы, когда Клеро писал свой классический труд — или немедленно вслед за этим, — к его книге был составлен важный и утвержденный затем им самим комментарий, о котором необходимо сказать теперь же несколько слов. Произошло это следующим образом. Маркиза Эмилия дю-Шатлэ (1706—1749), — сыгравшая столь значительную роль в судьбах Вольтера, — обладала, при общей силе культуры той эпохи, еще и совершенно незаурядными математическими способностями. Ученица Самуила Кенига (1712—1757), — который сам вышел из школы Иоганна и Даниила Бернулли в Базеле и чье имя, кстати сказать, несколько позже, в 1750-х годах, шумело во всей ученой Европе после знаменитой „Диатрибы“ Вольтера против Мопертюи, — маркиза дю-Шатлэ, „божественная Эмилия“, как ее именовал Вольтер, на высших ступенях своего математического развития находилась под несомненным влиянием Клеро. Под обаянием ли этого математика или повинуясь Вольтеру в его безоговорочном признании ньютоновой философии в целом, она, повидимому, не без колебаний, после периода увлечения системой Лейбница,* перешла на сторону ньютоньянцев и приняла на себя значительный и важный труд — дать Франции полный перевод ньютоновых „Начал“ с латинского на родной язык. Этот перевод она снабдила двумя комментариями. В первом, общедоступном, она дала строгое и превосходно написанное „Сокращенное изложение Системы мира“. Второе носило название: „Аналитическое решение важнейших задач, относящихся к Системе мира“, в пяти частях; содержание их было: „I. О траекториях при всех предположениях о тяготении. II. О притяжении тел, с учетом их фигуры. III. Об объяснении преломления лучей при помощи гипотезы тяготения. IV. О фигуре Земли и V. О приливах“.

---

* О чем свидетельствует ее книга „Основы физики, данные в виде уроков ее сыну“ (Institutions de Physique, 1740), изданная анонимно.

Из „Исторического предисловия“, которым Вольтер снабдил издание этого перевода ньютоновых „Начал“,* мы узнаём, как составлялась эта математическая или, по тогдашней терминологии, „алгебраическая“ часть Комментария.

„Что касается Алгебраического Комментария, — пишет Вольтер, — то это труд, стоящий высоко над переводом. Маркиза дю-Шатлэ работала в нем по идеям Клеро (sur les idées de Clairaut); она сама производила все вычисления, и когда она заканчивала главу, г-н Клеро ее просматривал и исправлял. И это не все: в столь тягостной работе всегда может проскользнуть описка, в формулах очень легко поставить один знак вместо другого. Г-н Клеро отдавал на просмотр третьему лицу все выкладки, после того, как они были приведены к окончательному виду; так что внутренне невозможно (moralement impossible), чтобы в этой работе остались ошибки от невнимания; и этого вообще можно было бы опасаться тем менее, что всякая работа, к которой приложил свою руку г-н Клеро, не может не быть превосходной в своем роде“.

Как уже отмечено, Комментарий был закончен в 1745 г., всего через два года после выхода в свет книги Клеро; к тому же его работа над этим переводом подчеркивается и официально, в неизбежной тогда „аппробации“ книги к печати. В данном случае, эта аппробация гласит: „По распоряжению Монсеньера Канцлера** я прочел перевод «Математических начал натуральной философии», вместе с Аналитическим Комментарием к нему г-жи маркизы дю-Шатлэ,

---

* Principes Mathématiques de la philosophie naturelle, par feue Madame la Marquise du Chatellet, vol. I et II. Странным образом, имя Ньютона на титульном листе отсутствует. Книга была закончена в 1745 г.: она внесена в реестр Палаты издателей и книгопродавцев Парижа 7 марта 1746 г., но опубликована только в 1759 г., через 10 лет после смерти дю-Шатлэ.

** Президента Королевской Академии Наук в Париже; напомним, что она была основана в 1666 г., но начала регулярную деятельность только в 1699; с первых же лет работы в ее состав были привлечены выдающиеся иностранные ученые: Хр. Гюйгенс, Олаф Рёмер и др.

и я не нашел в них ничего, что могло бы воспрепятствовать их печати. В Париже, 20-го декабря 1745 г. Клеро“.

При этих условиях и не останавливаясь далее на этой замечательной картине XVIII в., в которой величайший публицист Франции, знаменитый математик и задумчивая маркиза* склоняются над вечными страницами ньютоновых „Начал“, мы будем здесь просто считать, что книга Клеро и IV часть Комментария дю-Шатлэ, трактующая о фигуре Земли, составляют единое и нераздельное целое и в соответствующих местах взаимно заменимы, — тем более, что в Комментарии повторяются те же чертежи, с теми же обозначениями, как и в книге Клеро; поэтому в тех местах, где доказательства в Комментарии более развернуты и более отчетливы, чем в книге Клеро, мы включили их в самый текст нашего перевода с соответствующей оговоркой. К сожалению, Комментарий не распространяется на вторую половину II части книги Клеро, где излагается теория фигур равновесия неоднородной вращающейся жидкости, т. е. как раз то самое, что теперь носит название „проблемы Клеро“.

После смерти Клеро его книга была переиздана во Франции во времена наполеоновской империи (1808 г.). Никаких примечаний и пояснений к тексту не дано; в анонимном предисловии — оно приписывается Пауссону — сказано:

„В третьей книге Небесной Механики [Лапласа] дано развитие этой теории [т. е. Теории фигуры Земли] во всей требуемой подробности; поэтому тот, кто пожелал бы изучить эту теорию в ее современном состоянии, должен читать ее именно в этом изложении. Однако это отнюдь не освобождает нас от изучения хода рассуждений первых творцов этой теории. Наоборот, оно именно и возбуждает наш интерес к ним. Поэтому мы считаем, что второе издание книги Клеро принесет свою пользу, так как у него эти рассуждения изложены с таким изяществом (élégance), что уже этого одного было бы

* См.: К. Н. Державин, „Вольтер“ (1946, стр. 82—100), и нашу работу „Вольтер и Ньютон“ (Сб. „Вольтер“, изд. АН СССР).

достаточно, чтобы его книгу продолжали читать с живым интересом во все времена, независимо от того, как велики окажутся здесь дальнейшие успехи науки".

Кто бы ни был автор этой вводной страницы, написанной в 1808 г., он обнаружил здесь правильное понимание задач истории науки, и его слова были, в сущности, и нашим девизом, когда мы предпринимали этот перевод.*

Кроме французских изданий, книга Клеро имеется и в немецком переводе, изданном в известной серии „Классиков естествознания Оствальда".** В этом издании сохранено старинное написание формул, бережно оставлены важнейшие опечатки, имевшиеся во французских изданиях;*** комментарий содержит только литературно-исторические, в некоторых местах совершенно неверные данные.****

Заметим, наконец, что довольно детальное критическое изложение всей книги Клеро можно найти в известной английской книге Тодгэнтера по „Истории теорий притяжения и фигуры Земли.*****

Таковы важнейшие источники нашего издания. Приступая к нему, мы поставили своей задачей дать современному читателю по возможности легко читаемый и удобопонятный текст знаменитой книги. Поэтому написание формул в тексте приведено к современному, а в детальный комментарий введены те обозначения, которые приняты в Теории фигуры планет еще со времен Лапласа и которые применяются, например,

---

* Издание 1808 г. было перепечатано без изменений в 1900-х годах издательством Gauthier-Villars в Париже.

** Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, No. 189. Theorie der Erdgestalt nach Gesetzen der Hydrostatik, von Clairaut, herausgegeben von Ph. Jourdain und A. v. Oettingen, Leipzig, 1913.

*** Особенно тягостная в § 63 второй части.

**** Например, п. 41, где Даламберу приписывается утверждение, которого на указанном месте нет.

***** Todhunter. History of the Theories of Attraction and the Figure of the Earth, 2 vol. (1873); особенно vol. I, p. 189—230.

в трактате Тиссерана и в работах Ляпунова;* и общую цель нашей работы мы видели не только в том, чтобы издать перевод книги Клеро, но и в том, чтобы в комментарии выявить ее живую и вечную связь с дальнейшим развитием теории фигуры планет.

II

После этих предварительных замечаний о предыдущих изданиях книги Клеро и об имеющихся к ней комментариях поставим более общий вопрос: в чем же состоит главная задача, которую решает ее автор, и с какими проблемами той эпохи связано ее появление?

Цель всей работы и, как мы бы сказали теперь, ее общая направленность превосходно выражены самим Клеро в заключительных словах его произведения:

„Изложенная нами теория, — говорит он, — находится уже в соответствии и с маятниковыми измерениями силы тяжести и с наблюденным сжатием Юпитера; если, кроме этого, геодезические измерения, которые мы ожидаем от перуанской экспедиции, дадут, по сопоставлении их с нашими измерениями в Лапландии, для сжатия Земли величину меньшую, чем 1:230-я, то эта теория получит подтверждение во всей возможной полноте, так что закон всемирного тяготения, уже столь прекрасно согласующийся с движениями планет, окажется в таком же соответствии и с фигурами этих небесных тел“.

Таким образом, одна из самых основных проблем науки XVIII столетия должна была получить здесь свое последнее, окончательное решение. Подчинена ли вся материя столь недавно раскрытому и столь загадочному в его сущности

* Tisserand. Traité de Mécanique Céleste, vol. II, p. 186—220. — Liapounoff. Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes, 1903 (Mém. Ac. Sc. St.-Pétersb., vol. XIV, No. 7); Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie de la figure des planètes, 1904 (ibidem, vol. XV, No. 10).

закону всемирного тяготения? Верно ли, например, что Земля,— как некогда огненно-жидкая планета, — должна иметь форму эллипсоида, сжатого по оси вращения? Так утверждал Ньютон; но ведь, напротив того, из декартовой теории вихрей, из гипотезы „полного“ декартова, а не „пустого“ ньютонова пространства следовало, что ее фигура должна быть вытянута по оси; и, повидимому, так оно и получалось из длинного ряда геодезических работ, блестяще начатых еще давным-давно, в 1679—1680 гг., во Франции астрономом Пикаром, затем прерванных в 1683 г. (после смерти знаменитого министра Кольбера), затем снова возобновленных в 1701 г. и законченных только к 1715 г. Жаком Кассини, вторым директором Парижской обсерватории.*

Вокруг этой дилеммы: „сжатая или вытянутая?“, или, как тогда говорили, „oblatum sive oblongum“, и горели в ту эпоху ученые споры. Напряжение их было столь велико, что, например, в одном 1733 г. вышло шесть мемуаров, относившихся к проблеме фигуры Земли.** От узко специальных вопросов, относящихся к астрономическим определениям разности широт и к триангуляциям, эти споры переносились на самую высокую проблематику: от их исхода зависело решение о той или другой „Системе мира“, — говоря языком того времени. В этих условиях Парижская Академия, пользуясь сочувственным вниманием морского министра, де Морепа, приняла историческое решение: направить экспедицию из академиков математиков, астрономов и географов в область экватора, — где теперь республика Эквадор, а тогда были земли союзного с Францией испанского короля, — с задачей измерить длину дуги

* Все эти работы резюмированы в обширном труде, изданном в 1720 г., „De la Grandeur et de la Figure de la Terre“, par J. Cassini, Suite des Mémoires de l'Académie Royale des Sciences pour l'année 1718.

** Авторами их были академики Мопертюи, Годэн, Ла-Кондамин, Клеро и Бугэ. См. прекрасную работу G. Bigourdan, „Sur diverses mesures d'arcs de méridien, faites dans la première moitié du XVIII s.“ (Bull. Astron., 1901, t. XVIII, p. 320).

меридиана и соответствующую ей разность широт, а также длину дуги экватора и соответствующую ей разность долгот. Впрочем, от этой второй задачи Академия вскоре отказалась, и экспедиция, отбывшая из Франции в 1735 г., долгие восемь лет работала в труднейших условиях Перуанской Кордильеры над измерением довольно значительной по своему протяжению дуги меридиана под экватором (разность широт или „амплитуда дуги“ была 3° 8′). Главные ее участники после многообразных приключений и опасностей поодиночке возвращались во Францию: первым — в 1743 г. Бугэ, этот замечательный ученый, имя которого мы встречаем в основных построениях и теоретической фотометрии, и гравиметрии, и теории корабля;* затем в 1744 г. — Ла-Кондамин, соединявший обширную и разнообразную эрудицию с исключительной страстью ко всевозможным наблюдениям. После окончания геодезических работ в Перу он совершил опаснейшее путешествие в глубь южноамериканского материка, по неизведанной еще Амазонке, и оставил нам его превосходное описание.** Наконец, третий, математик Годэн, появился в Европе только в 1750 г., но во Францию не вернулся, оставшись в Кадиксе, как профессор на службе испанской короны.

Однако по возвращении из этих продолжительных и тяжких странствий и после всех трудов, осложненных бесконечными взаимными раздорами, участники перуанской экспедиции могли только узнать, что за время их долгого отсутствия проблема

---

* Отметим здесь только две его книги: „Théorie de la Figure de la Terre“, par J. P. Bouguer (1749), где дан вывод той формулы редукции силы тяжести, которой гравиметристы пользуются и по сей день, и его „Traité du Navire, de sa construction et de ses mouvements“, 1746, которая вместе с книгой L. Euler „Scientia Navalis“ лежит в основе теории корабля (см.: A. Kriloff. Theorie des Schiffes. Enz. d. Math. Wiss., IУ, 22, S. 52).

** La Condamine. Relation abrégée d'un voyage fait dans l'intérieur de l'Amérique Méridionale (Mém. Ac. Sc. de Paris pour 1745, publié en 1749, p. 391—492).

фигуры Земли была практически и принципиально решена; другая группа академиков сумела уже получить этот результат, и притом в весьма короткий срок. То была знаменитая лапландская экспедиция Парижской Академии Наук. Во главе ее стоял Пьеро-Моро́ де Мопертюи (1698—1759), выбранный в академики еще в 1723 г., в возрасте 26 лет; в числе ее участников находился Алексис-Клод Клеро (1713—1765), молодой друг и в известной мере ученик Мопертюи. Как же все это произошло?

„Во время этих происшествий, — читаем мы в известной „Истории математики“ Монтюкла,* — Мопертюи, который был вхож к графу де Морепа, однажды, во время его выздоровления, предложил ему менее продолжительное путешествие, а именно экспедицию к северному полярному кругу с тем, чтобы вблизи его измерить градус дуги меридиана. Законное нетерпенье, с которым ожидали решения вопроса о фигуре Земли, побудило принять этот проект. Мопертюи, в сопровождении академиков Клеро, Камюса, Лемонนье и аббата Утье, который был тогда „элевом“ на Обсерватории, отправился в экспедицию, получив рекомендательные письма французского министерства к шведскому королю“.**

Лапландская группа, к которой в Швеции присоединился профессор Цельзий, провела свою работу дружно и с энтузиазмом. Первоначально предполагалось проложить триангуляционный ряд по прибрежным островкам северной части Ботнического залива. Но на месте выяснилось, что все эти островки почти не возвышаются над уровнем моря; ставить на них сигналы, видимые издалека, было бы невозможно.

---

* J. F. M o n t u c l a. Histoire des Mathématiques (1802), t. IV, p. 149.— Здесь речь идет о дебатах по теории фигуры Земли, не прекратившихся в Парижской Академии и после отправки перуанской экспедиции.

** В этом месте Монтюкла (или редактор посмертного издания его Истории, Лаланд) делает следующее примечание: „Мопертюи был приятен, он сочинял песенки и играл на гитаре; все это помогло ему получить то поручение, которого он добивался“.

Поэтому решили вести триангуляцию по долине реки Торнео, которая течет почти по меридиану с севера и впадает в залив у города с тем же названием. Начав от него, прошли на север приблизительно 110 км, до местечка Пелло, под горой Киттис. Вся триангуляция имела форму растянутого семиугольника; сигналы — числом восемь — ставили на вершинах окрестных гор, прорубая к ним, при помощи приданных воинских команд, просеки в лесах. Эта работа была закончена в два месяца (июль — август 1736 г.). Трудности при перевозке людей и инструмента для измерения горизонтальных углов были громадные; особенно страдали члены экспедиции от насекомых, которые черными тучами садились на людей и на пищу. Но всё это превозмогли. „Все наши переезды, — пишет Мопертюи в своей отчетной книге,* — и 63-дневное пребывание в этой глуши дали нам лучшую из всех сетей треугольников, которую мы только могли желать. Работа, начатая нами, когда мы еще не знали, окажется ли она возможной, и, так сказать, наугад, оказалась вполне удачной; в ней мы как будто бы могли ставить горные вершины по нашему желанию“. Во всей этой работе Мопертюи, очевидно, проявил нечто большее, чем уменье сочинять песенки: настойчивость и упорство, организаторский талант. Покончив с триангуляцией, перешли к астрономическим наблюдениям. Программа их несомненно была тщательно продумана заранее. При помощи большого зенитного сектора (труба 9 фут., лимб в $5^1/_2{}^\circ$, деленный через $7' 30''$, работы знаменитого Грэхама в Лондоне) определялись не зенитные расстояния какой-либо звезды, а только р а з н о с т и зенитных расстояний одной и той же звезды, последовательно наблюденной в меридиане сперва на северном, затем, после

---

* La Figure de la Terre, déterminée par les observations de Messieurs de Maupertuis, Clairaut, Camus, Lemonnier de l'Académie Royale des Sciences et de M. L'abbé Outhier, Correspondant de la même Académie, accompagnés par M. Celsius, professeur d'Astronomie à Upsal, faites par ordre du Roy au Cercle polaire, par M. de Maupertuis. A Paris, de l'Imprimerie Royale, 1738.

перевозки инструмента, на южном пункте триангуляции. Первой из этих зенитных звезд была δ Дракона: ее наблюдали 4, 5, 6, 8 и 10 октября в Киттисе и 1, 2, 3, 4, 5 ноября в Торнео. Дифференциальные поправки видимого места звезды за этот месяц, с учетом не только прецессии, но и аберрациии и нутации, Мопертюи получил от самого Брадлея,* сделавшего еще столь недавно эти бессмертные открытия. Со всеми этими поправками амплитуда дуги оказалась равной 57′ 27″.

Там же, в Киттисе, определили по Солнцу азимут двух выходных сторон триангуляции и ориентировали ее по меридиану. В декабре в одну неделю выполнили третью часть всей операции: измерение базиса длиной около 15 км на льду, по самой реке Торнео, приблизительно по середине всей триангуляции. „Мы отправились к реке, — пишет Мопертюи, — с таким количеством саней и с таким кортежем, что лапландцы спускались с их гор, привлеченные новостью зрелища“.** Работу вели две партии, измерение производилось длинными (в 10 м) сосновыми жезлами, которые предварительно при комнатной температуре сравнивались с другими жезлами, а эти последние в свою очередь проверялись по нормальной сажени (туаз, в системе старинных французских мер), привезенной из Франции. Морозы во время работ стояли лютые (—37° по Реомюру), французы страдали от них жестоко. Но и здесь все прошло благополучно и успешно. Измерения обеих партий разошлись всего на 10 см. После этого вычислили триангуляцию и обнаружили, что длина градуса получилась чуть ли не на 1000 туазов (2 км) больше, чем следовало по книге Кассини от 1720 г. „Длина дуги, — читаем мы у Мопертюи, — которую мы измерили, оказалась настолько больше той, которая вытекала из измерений, приведенных в упомянутой книге о величине и фигуре Земли, что это нас изумляло; и, несмотря на бесспорность всей операции, мы

* Там же, стр. 44 и 123.
** Там же, стр. 51.

решились провести самые строгие проверки всех наших работ“*.

Геодезическая часть их, при многочисленных контролях измерения углов, казалась выше подозрений; поэтому повторили только то, что было легче всего повторить, именно астрономические наблюдения. Выбрав теперь другую звезду, именно α Дракона, пронаблюдали ее три раза (17, 18, 19 марта 1737 г.) в Торнео и затем три раза (4, 5, 6 апреля) в Киттисе. Амплитуда дуги, со всеми поправками Брадлея, получилась теперь 57′ 30″. Мопертюи взял среднее из обоих определений и отсюда окончательно получил длину дуги градуса меридиана под средней широтой 66° 20′ в 57 437.9 туаза, что в переводе на метрическую систему дает 111 км 949 м.** На этом основная работа экспедиции была закончена; она выполнила, однако, еще ряд астрономических наблюдений, произвела определение силы тяжести в Пелло, пользуясь превосходными маятниками от Леруа в Париже и от Грэхама в Лондоне. В июне отбыли обратно из места работ в Стокгольм, и в сентябре 1737 г., через 15 месяцев после отправки, экспедиция вернулась во Францию.

Она привезла туда „сжатую Землю“, ньютоновский oblatum: действительно, уже из старинных работ Пикара было известно, что длина градуса меридиана под широтой Амьена (49° 55′) составляла 57 060 туазов, т. е. 111 км 212 м. Таким образом, у полярного круга длина одного градуса получилась на 737 м больше, чем под широтой северной Франции. Длина дуги меридиана, соответствующая изменению широты на 1°, увеличи-

* Там же, стр. 63.

** При этом переводе мы пользуемся классическим соотношением: 1 туаз = 1.949040 м, которое было установлено при введении метрической системы мер; нужно только помнить, что оно относится к так называемому „перуанскому туазу“, которым пользовался Буге; что касается „лапландского туаза“ Мопертюи, то совершенно точная длина его неизвестна, так как этот туаз пострадал при кораблекрушении во время возвращения Мопертюи во Францию.

валась весьма заметно от экватора к полюсу; а это было, — как тогда уже ясно понимали, — совершенно несовместно с геометрией вытянутой кассиниевой Земли.*

Мопертюи, по возвращении во Францию, попал в центр общего внимания. Появились его портреты в лапландской шапке и в мехах, с палицей Геркулеса в одной руке и со сжатым земным шаром в другой. Его книгу, превосходно написанную и изданную чрезвычайно быстро, меньше чем в один год, переводили на разные языки; шум вокруг нее и вокруг всей проблемы фигуры Земли не умолкал. Впоследствии Мопертюи писал:

„Вернувшись, мы столкнулись с значительными раздорами; Париж, жители которого не могут остаться безразличными ни по какому вопросу, разделился на два лагеря: одни приняли нашу сторону; другие же считали, что для чести нации невозможно, чтобы у Земли осталась иностранная фигура, которую придумали один англичанин и один голландец“.**

Разумеется, ньютоньянцы могли только ликовать. Вольтер, — один из первых среди них во Франции, — еще лет 6—7 тому назад поучался у Мопертюи о первых истинах закона тяготения; теперь он сам печатал в Амстердаме известную книгу об „Элементах ньютоновой философии“, которая, кстати сказать, несколько позже послужила главным мотивом избрания его в корреспонденты Петербургской Академии Наук; после возвращения Мопертюи из Лапландии он писал ему письма, полные

* По этому вопросу долгое время считали как раз обратное, пока его не разъяснил в 1719 г. некий инженер Рубэ (Roubaix). См.: Bigourdan, op. cit., p. 322. Детальное изложение истории французских градусных измерений XVIII в. можно найти в старых книгах: Montucla, Hist. des Mathém., t. IV, p. 137—175 (1802); Bailly, Hist. de l'Astronomie Moderne, III, p. 1—56 (785). Из новых: Todhunter, op. cit., I, p. 93—103 и 231—248; Bigourdan, Bulletin Astronomique, vol. XVIII, p. 320, 351, 389, 444. См. также: H. Poincaré. La Géodésie Française, Science et Méthode, p. 290—306, и Ф. Н. Красовский. Руководство по высшей геодезии, ч. II, стр. 421—433 (1942).

** Т. е. Ньютон и Гюйгенс. См.: Maupertuis, Lettres XIII (Sur la Figure de la Terre), Oeuvres, éd. 1758, vol. II, p. 296.

лестных (если не льстивых) похвал. Тот замок Сирэ, принадлежавший мужу „божественной Эмилии“, где он провел в полной безопасности и беспечной роскоши добрые 16 лет, — этот замок он именовал в своих письмах „Киттис-Сирэ“; и сам Мопертюи получал в них титулы „сэра Исаака“, „гордости своего века“, или того, „кто сплюснул и Землю и всех Кассини“. К одному из упомянутых портретов героя Севера Вольтер написал хвалебные, впрочем чрезвычайно слабые (как сам он признавался), стишки. Но времена меняются, и через 13 лет после лапландской экспедиции, уже не на берегах Сены, а на берегах Шпрее, Мопертюи, тщеславный директор Берлинской Академии, узнал на себе всю силу демонической ярости Вольтера: все это случилось в связи с появлением довольно туманной работы Мопертюи о „принципе наименьшего действия“, с выступлениями упомянутого уже Самуила Кенига, и закончилось бурным разрывом Вольтера с Фридрихом II и трагикомической историей ареста Вольтера и его племянницы во Франкфурте.* Весь этот инцидент, — мы бы

* Письма Вольтера к Мопертюи находятся в XI томе полного собрания его сочинений (Oeuvres, Ed. Firmin Didot, vol. XI, XII); особенно интересны на стр. 254, где Вольтер пишет ему (январь 1738 г.): „Ведь рано или поздно истина и вы возьмете верх. Помните, что были диссертации и против кровообращения; думайте о Галилее, и успокойтесь“. Мопертюи и Галилей! — пожалуй, несколько сильно и для самого Вольтера. Но через 14 лет (там же, на стр. 629, октябрь 1752), в письме из Потсдама к племяннице (M-me Denis): „Во время всех этих споров Мопертюи совершенно помешался... И вот человек, который составил себе я не знаю какую репутацию потому, что он был в Торнео и похитил там двух лапландок... И он был моим другом!“ Об этих двух лапландках, появление которых на улицах Парижа вызвало, можно думать, не меньшую сенсацию, чем решение вопросов высшей геодезии, см. в письмах Вольтера, там же, стр. 305 (к Мопертюи) и стр. 683 (к Даржану, 1754): „В год немилости 1738 г. он, Мопертюи, схватил в свои когти двух обитательниц ледяной зоны, но написал тогда всем своим друзьям, также и мне, что это врач их экспедиции похитил этих несчастных; соответственно, он начал с того, что устроил сбор в их пользу, якобы как искупитель чужой вины. Я послал ему тогда пятьдесят экю“... и т. д. и т. д.

сказали, одинаково тягостный как в биографии Мопертюи, так и в биографии Вольтера, — и связанный с ним знаменитейший памфлет Вольтера: „Диатриба [отповедь] доктора Акакии уроженцу Сен-Мало“, — все это чрезвычайно затрудняет для историка науки XVIII в. правильную оценку значения в ней Мопертюи: но, оставив в стороне его характер, который несомненно является несколько рекламным, и некоторое фантазерство во многих его писаниях, мы все же должны подчеркнуть здесь, что его роль в истории теории фигуры Земли немала: с 1732 г. начинается беспрерывный ряд его публикаций по этому вопросу, причем в первой из них, как писал впоследствии Бальи, он оказался и первым из французских математиков, применившим закон тяготения;* он, несомненно, обладал некоторым математическим дарованием и дал, например, простую формулу для вычисления сжатия меридиана по длине двух дуг одинаковой амплитуды, измеренных под разными широтами; он первый провел различие между „притяжением“ и „тяжестью“ и дал корректное решение задачи: по заданным величине и направлению силы тяжести в точке сфероида найти величину и направление силы тяготения.**

Это подчеркивает и Клеро в неоднократных ссылках на работы Мопертюи в своей книге.*** Все это, в связи с умелой организацией северной экспедиции — и независимо от ее результата (о чем ниже), — побуждает нас видеть в нем одного из первых геодезистов в современном понимании этого слова, великого энтузиаста своего дела. Но, вместе с тем, и его рассуждения о „наименьшем действии“ заключали в себе зерно некоторой истины, ибо известно, что Эйлер, подвергший эту проблему анализу с глубиной и силой, значительно превосходившими возможности Мопертюи, ввел в научный обиход навсегда

---

* Bailly, Hist. Astron. Moderne (1785), vol. III, p. 7.

** Figure de la Terre etc. (1738), p. 127—130; 153—162; 182—184.

*** Введение, см. стр. 15, Первая часть, § 10, 29, 73, 76.

сохранившееся название „принципа Мопертюи“,* так что герой лапландской экспедиции остался известен в истории науки еще и как провозвестник вариационных принципов механики.

III

В кругу всех этих ярких и темпераментных личностей XVIII столетия, — но как бы на некотором расстоянии от них, при шуме их споров и при темной игре их тщеславий и страстей, — но совершенно чуждый им, Клеро провел свою относительно не очень долгую жизнь. Его биография во многом отлична от жизнеописания выдающихся людей той эпохи. Имена сильных мира того, как Фридриха, или Екатерины, или маркизы Помпадур, в этой биографии, — в отличие от жизней близких ему Вольтера, Даламбера, Дидро, — не встречаются вовсе. Излагать ее — значит представить картину его детства и после этого сразу перейти к перечню его работ.**

* Maupertuis. Accord des différentes lois de la Nature. Mém. Ac. Sc. Paris, 1744; Des lois du mouvement et du repos, déduites d'un principe métaphysique. Mém. Ac. Sc. Berlin, 1745, p. 286. Обе работы перепечатаны в Oeuvres, éd. de Lyon, 1768, vol. III. — Euler, Mém. Ac. Sc. Berlin, 1751, p. 199 et 246, а также отдельно Dissertatio de principio minimae actionis (1753). См. также: Лагранж. Аналитическая механика (русск. перев. изд. 1938), стр. 180 и 218.

** Биографические материалы довольно скудны; первое место занимает Речь памяти Клеро (Éloge de Clairaut), анонимная, но, как известно по другим источникам, составленная академиком математиком Фонтэном (Fontaine), напечатана в Hist. de l'Académ. R. des Sc. de Paris, 1765, p. 144—159; статья Дидро у Grimm, Correspondance littéraire. Биография Клеро в Biographie universelle (Michaud) составлена Lacroix (vol. VIII, p. 322). Из более новых работ: J. Bertrand. Clairaut, sa vie et ses oeuvres (Éloges académiques, Nouv. série, p. 231—261. Имеется одно письмо Вольтера к Клеро от 1759 г. (vol. XII, p. 24) (см. выше, стр. 217) и несколько писем Вольтера, в которых говорится о нем: к Даламберу (XII, p. 630) и к Варенну (XI, 575) (см. стр. 219). В Архиве Академии Наук хранятся несколько писем Клеро к Эйлеру, к профессору Гришову и секретарю Миллеру; имеется также и вся переписка, связанная с присуждением ему премии в 1751 г. за работу по теории движения Луны.

Алексис Клод Клеро родился 13 мая 1713 г. в Париже, в семье Жана Батиста Клеро, преподавателя математики и члена Берлинской Академии Наук, — вторым в семье, насчитывавшей всего 21 ребенка. Преждевременность его математического развития производит теперь странное и необычайное впечатление. Он выучился алфавиту по чертежам в „Элементах" Евклида; к девяти годам свободно читал книги де-Лопиталя по коническим сечениям и по анализу бесконечно малых; на тринадцатом году написал свой первый мемуар. „Его отец, — читаем мы в его биографии, — представил своего сына Академии, чтобы он прочел там свою работу; но она настолько мало соответствовала его возрасту, что возникло сомнение, может ли она действительно ему принадлежать; и только тогда, когда по вопросам, ему предложенным, академики убедились, что он может представить и работы еще более сложные, он получил от ученой коллегии похвалы, им заслуженные; в особенности же аббат Рейно, который тогда присутствовал, не мог удержать слез радости при виде ребенка, достойного уже войти в круг самых замечательных людей".*

Таково было единственное в своем роде начало. Затем, через три года, пережив довольно тяжелую болезнь, Клеро представил Академии в 1729 г. свой знаменитый мемуар „Исследования о кривых двоякой кривизны", которым он положил начала дифференциальной геометрии пространственных кривых; и мы читаем у его биографа: „Академия вынесла решение, чтобы мемуар был возможно скорее напечатан, вместе

* Éloge, p. 148. В этом мемуаре Клеро идет речь о четырех кривых четвертого порядка, типа $x^4 = a^2 (x^2 + y^2)$, $x^4 + x^2y^2 = a^2$, и т. д. и их свойства исследуются с помощью анализа. Упоминание о докладе этой работы в Hist. Acad. R. Sc., Paris, 1726 (éd. 1753), p. 45. Там сказано следующее: „Этому автору было тогда всего 12 лет и 8 месяцев. В прежнее время подобное произведение сделало бы честь самым искусным геометрам, а теперь надо поделить хвалу между превосходством новых методов и изумительным гением ребенка". Сама работа напечатана позднее в Miscellanea Berlinensia, IV, 143—152 (Berlin, 1734). См.: M. Cantor, Vorlesung. üb. die Geschichte d. Math., Bd. III, S. 779 (1901).

с почетным удостоверением, которым она его удостоила и в котором особенно отмечены были те предосторожности, которые приняла Академия с целью убедиться, что автору его едва минуло 16 лет, когда он представил книгу, которую почитали бы честью для себя самые знаменитые геометры“.*

После этой работы, как естественно, Академия стремится привлечь необычайного юношу в свои ряды. Но по регламенту адъюнкты Академии не могли быть моложе двадцати лет. Поэтому через графа де Морепа возбуждают ходатайство перед Людовиком XV о специальном разрешении для Клеро (dispense d'âge); король медлит некоторое время, но когда Клеро достигает 18 лет, утверждает его (14 июля 1731 г.) адъюнктом по механике; три кандидата старше Клеро (среди них — Бугэ) отклоняются. Этот случай остался единственным за всю историю Парижской королевской Академии Наук, т. е. с 1666 по 1792 г.**

---

* Éloge, p. 150. Эта работа напечатана в 1731 г. отдельной книгой под названием „Recherches sur les courbes à double courbure (113 стр.). Оригинала ее нам видеть не удалось; у M. Cantor'а (loc. cit., 779—784) имеется весьма подробный ее анализ, который заканчивается словами: „Читатель вместе с нами присоединяется к тем восторженным похвалам, которые имеются в отзыве академика Прива-де-Мольера“ (напечатанном в предисловии к изданию 1731 г.).

** Здесь уместно остановиться на ее составе. В нее входили 12 почетных членов; то были, вообще говоря, вельможи, интерееовавшиеся науками; затем 20 членов-пенсионеров (они одни получали пожетонное вознаграждение, носили черные мантии и парики); пенсионеры составляли основное рабочее ядро Академии; среди них было по три геометра, астронома, механика, анатома, химика и ботаника, секретарь и казначей. Следующую группу составляли двадцать associés („присоединенных“), а именно по два на каждую из указанных шести секций, и восемь иностранцев, которые могли избирать ученую специальность по усмотрению; к ним, несколько позднее, были прибавлены еще 4 associés libres. Наконец, третью группу составляли 12 адъюнктов (adjoints), по два на каждую дисциплину. Про них в регламенте 1715 г. сказано: „Адъюнкты должны иметь жительство в Париже; они пользуются совещательным голосом только по научным вопросам; они могут занимать места между associés, когда пустые места окажутся; если же таковых не будет, они разместятся, без различия, на местах, которые им

Вскоре после этой решающей даты Клеро вместе с Мопертьюи, который пожелал его сопровождать, отправляются в Базель, к знаменитейшему тогда среди математиков старшего поколения Европы Иоганну Бернулли, учителю Леонарда Эйлера. Сколько времени они там остаются — неизвестно, но биограф Клеро говорит, что ему „не пришлось сожалеть об этом путешествии, как по тому количеству знаний, которые он извлек, так и в силу тех дружественных отношений, которые у него завязались с Бернулли и с его почтенным семейством".*

По возвращении из Базеля в Париж Клеро и Мопертьюи попадают в самый разгар споров о фигуре Земли; готовилась перуанская экспедиция, а Мопертьюи, как мы уже знаем, задумал свой собственный проект. Для того чтобы подготовить своего молодого, но уже знаменитого друга к предстоявшим астрономическим работам, Мопертьюи увез его далеко от города, в Мон-Валерьен, который тогда был деревушкой,

будут указаны". Президент Академии и его заместитель назначались королем из числа почетных членов, секретарь и казначей избирались пожизненно из числа пенсионеров. Весьма красочное и любопытное описание заседаний и состава Парижской Академии в несколько более позднюю эпоху можно найти в письме астронома Лекселля к И. А. Эйлеру, непременному секретарю Петербургской Академии, от 7 января 1781 г. (Ученая корреспонденция Академии Наук XVIII в., изд. АН СССР, 1937, стр. 490—500) и в специальных книгах: E. Maindron, L'Académie des Sciences. Paris, 1888: стр. 18 — основной регламент 1699 г., стр. 46—47 — регламент 1715 г; см. также: Maury. Les académies d'autrefois, vol. I, Paris, 1864.

* Éloge, p. 151. — Иоганн Бернулли (1667—1748) с 1705 г. занимал в Базельском университете кафедру математики, вакантную после смерти его старшего брата Якова Бернулли. О том влиянии, которое он имел на математиков XVIII в., видно из первых фраз речи Даламбера, посвященной его памяти (D'Alembert, Oeuvres, vol. III, Éloge de Bernoulli, p. 338—360): „Я знал Бернулли только по его трудам, и я обязан ему почти полностью теми немногими успехами, которые я сделал в математике"; там же (стр. 359) упоминается о поездке к Бернулли Клеро и Мопертюи. В русском переводе имеются „Избранные сочинения по механике" И. Бернулли (изд. 1937 г.) См.: Цейтен. История математики в XVI и XVII вв. (русск. пер.), 1933, стр. 84—86; Розенбергер. История физики, ч. II (русск. пер.), стр. 262—264.

а значительно позднее одним из фортов внешней обороны Парижа. Теперь опять мы предоставим слово современнику и биографу Клеро:

„Удаление от Парижа все же не поставило его под защиту от посещений; знаменитая маркиза дю-Шатлэ решила обучиться математике у Клеро и она часто верхом приезжала в Мон-Валерьен, и именно для этой дамы он составил ту книгу об «Элементах геометрии», которую он опубликовал затем в 1741 г.“

Но не ошибся ли здесь старинный биограф? Не предназначались ли записки об „Элементах геометрии“ для сына маркизы,* того самого, для которого она сама составила „Основы физики“ в духе лейбницианской философии? Или вообще современному биографу нет оснований дольше останавливаться на этой странице, чем того требует сообщение о встречах на Мон-Валерьен?

Проходит еще год-другой. Клеро участвует в лапландской экспедиции; по возвращении, ему назначается от короля пенсия в 1000 ливров; и меньше чем через год король утверждает его, по представлению Академии, в звании пенсионера, т. е. действительного члена Академии по механике. Ему теперь около 25 лет.**

На этом его фактическая биография закончена; все дальнейшее было бы сплошным перечнем его работ. Но на изучении его творчества в целом мы здесь не можем останавливаться; заметим только, что оно довольно многообразно и, помимо общих проблем анализа, геометрии, механики, содержит обширные разделы по теории движения Луны и Земли и ее фигуры, по теории кометы Галлея, по прикладным темам (теория

* Так, по крайней мере, следует из Предисловия издателей к переводу ньютоновых „Начал“ (Avertissements, p. II). „Элементы геометрии“ Клеро представляют собой замечательное педагогическое сочинение, имевшее немалое значение в системе элементарного образования во Франции.

** Степень associé Клеро получил еще в 1733 г., двадцати лет; см.: Éloge, p. 153.

аберрации, ахроматические объективы, маневрирование кораблей). В ряде вопросов геометрии, анализа, небесной механики Клеро является основоположником и создателем великих ценностей. *

Особенно замечательна — помимо книги о „Теории фигуры Земли" — его теория движения Луны, где он первый разъяснил загадку с движением лунного перигея, так волновавшую астрономов XVIII в.;** и его работы по движению кометы Галлея, где он первый применил „численные методы" (так называемые механические квадратуры) для вычисления возмущений кометы от Юпитера и Сатурна и показал, что действие этих планет замедляет ее оборот (1682—1758) по сравнению с предыдущим (1607—1682) на 618 дней; соответственно этому, 14 ноября 1758 г., Клеро сообщил в Академии, что комета будет в перигелии 13 апреля 1759 г. По наблюдениям же, комета Галлея, появление которой было, таким образом, за всю историю человечества впервые предвычислено, прошла через перигелий 13 марта 1759 г.; ошибка вычисления составила 31 день.*** Но впоследствии Клеро улучшил свои

---

* Как хорошо известно, некоторые теоремы Клеро приводятся под его именем в курсах теории дифференциальных уравнений и теоретической механики; но от многих данных им формул его имя теперь отпало: таковы, например, выражения проекций ускорения в плоском движении на радиус-вектор и на перпендикуляр к нему, которые Клеро вывел на первых страницах своей „Теории Луны". Весьма интересны также его „Eléments d'Algèbre" (1749); в истории алгебры они занимают промежуточное положение между „Arithmetica Universalis" Ньютона (1707) и „Anleitung zur Algebra" Эйлера (1768).

** Об этих работах Клеро мы имели случай говорить детально в статье „Закон всемирного тяготения и теория движения Луны" (сборник „Исаак Ньютон", изд. АН СССР, 1943, стр. 192—202).

*** В этих достопамятных работах Клеро имел помощниками: молодого еще тогда Ж. Лаланда (Jerôme Lalande, 1732—1807), который впоследствии создал себе имя ведущего астронома-вычислителя и наблюдателя во Франции в конце XVIII в., и, кроме него, одну из первых женщин, избравших делом своей жизни астрономические вычисления: то была г-жа Николь Лепот (Nicole Lepaute, 1723—1788), жена знаменитого тогда конструктора

вычисления и довел расхождение до 19 дней, что можно было, действительно, считать великим торжеством вычислительной астрономии, оставившим яркое впечатление на всех, кто только видел тогда комету Галлея или хотя бы слышал про нее.

Так, в тиши своей комнаты, этот спокойный и, как мы читаем, всегда любезный человек и приятный собеседник шел от одного триумфа к другому. Его слава росла; советскому читателю будет интересно узнать, что две его работы получили премии Петербургской Академии Наук и напечатаны на французском языке в Петербурге; то были:

1) „Théorie de la Lune, déduite du seul principe de l'attraction, réciproquement proportionelle aux carrés des distances“. (Теория движения Луны, выведенная единственно из начала притяжения, обратно пропорционального квадратам расстояний).

Работа получила в 1751 г. премию по теме, объявленной еще в 1750 г. „Дело“ об этой премии хранится и по сей день в Архиве Академии; в нем имеется подлинная рукопись Клеро и отзывы Гольдбаха, Эйлера и Гейнзиуса. Эйлер, выяснив подробно достоинства работы, писал в заключении (по-латыни): „По этим причинам эту диссертацию не только нужно считать достойной высшей награды, но через нее и слава знаменитейшей Академии возрастает не незначительно, так как, предложив вопросы столь трудные, она привела к ясности положения самые скрытые“.

Премированная работа Клеро напечатана в Петербурге в 1752 г. Похвальную речь по случаю присуждения премии держал Никита Попов, назначенный профессором астрономии в 1751 г.*

и теоретика часовых механизмов (Jean Lepaute l'ainé, 1709—1788). Про нее сказано (Biographie universelle): „она была другом Клеро и Лаланда и сообщала им результаты своих работ, и они находили удовольствие их поощрять“. Однако в печати Клеро никогда не упоминал о помощи ему этой ученой женщины.

* Н. Попов. Речь о новых изобретениях в лунной теории (7 сентября 1752 г.). После этой премии Клеро стремился укрепить связи с Петербургской Академией; так, по поводу проекта установки на обсерватории Ака-

2) Вторая премированная работа была: „Recherches sur la comète des années 1531, 1607, 1682 et 1759 pour servir de supplément à la thèse, par laquelle on avait annoncé le temps du retour de cette comète“. (Изыскания о комете 1531, 1607, 1682 и 1759 гг., служащие продолжением работы, в которой было назначено время возвращения этой кометы.)

Премия по этой теме, объявленной в 1761 г., была присуждена в сентябре 1762 г.: именно здесь Клеро определил момент прохождения кометы Галлея через перигелий с точностью до 19 дней, — что обычно забывают в истории астрономии, где принято говорить об „ошибке Клеро на 1 месяц“.

Если бы список дошедших до нас работ Клеро был ограничен этими двумя премированными в стенах Петербургской Академии работами и его теорией фигуры Земли, то уже этого было бы достаточно, чтобы мы ценили в нем того геометра, который в период, промежуточный между Ньютоном и Лапласом, больше чем кто-либо сделал для утверждения закона всемирного тяготения в его величайших глубинах и, следовательно, для развития динамической астрономии; равной этим трем работам в истории механики и астрономии мы могли бы в эту эпоху считать только „Трактат по динамике“ и „Теорию предварения равноденствий“ Даламбера.*

В промежуток между двумя премиями Петербургской Академии Клеро был избран ее членом,** и в фондах Архива

демии (в башне над Кунсткамерой) большого стенного квадранта Клеро писал в Петербург 1 октября 1752 г. профессору Авг. Гришову: „Если Вы придете к мысли, что я мог бы быть полезен Вам моими исследованиями, укажите мне, что именно вам наиболее важно, и я с великим удовольствием возьмусь за работу, требуемую для этого, так как никто не желает развития этой области астрономии сильнее, чем я“. (Имеются в виду наблюдения Луны и их сравнение с теорией ее движения). (Фонды Архива АН СССР).

* D'Alembert. Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe terrestre dans le système Newtonien. Paris, 1749.

** В конце протокола Конференции от 8 июля 1754 г. значится (по-латыни): „Решено присоединить к сему из Франции Клеро и Кондамина,

сохраняется его благодарственное письмо (от 16 июня 1755 г.), отправленное при получении диплома Президенту Академии графу Разумовскому.

Мы только что упомянули рядом имена Клеро и Даламбера. Действительно, для историка науки они идут плечом к плечу; но для биографа их разделяет пропасть; недружелюбие, доходившее, как говорят иные, до ненависти со стороны Даламбера, отравляло долгие годы жизни Клеро. Не было ни одной теории, предложенной Клеро, против которой Даламбер не возражал бы, и притом, — как говорит Монтюкла, — „с той мелочностью и с той особенной аффектацией, за которыми скрывается по меньшей мере желание обесценить“.*

В немногих случаях (один пример мы узна́ем ниже) Даламбер был прав; но в большинстве — бессмысленно придирчив. Мы видели, например, что Клеро предвычислил возвращение кометы Галлея к перигелию с ошибкой в 1 месяц. Какова относительная погрешность этого вычисления? Большинство астрономов считали, что это один месяц, взятый по отношению к 76 годам обращения кометы, т. е. приблизительно 1 : 9000. Даламбер возражал. Клеро, говорит он, вычислял

из Швеции — Линнея“. Протокол подписали: Готфрид Миллер (секретарь с 1730 г.), Михайло Ломоносов, Степан Крашенников (профессор ботаники и натуральной истории с 1750 г.), М. Клейнфельд (адъюнкт анатомии с 1748 г.). Очевидно, весь вопрос был проведен Ломоносовым.

* Montucla, Hist. des Mathém., vol. IV, p. 72. Неприязненные отношения между ними начались, можно думать, еще в самом начале их академической карьеры. Так, во втором издании „Трактата по динамике“ Даламбер, приступая к изложению своего нового принципа, счел нужным и тактичным сделать примечание, в котором сказано: „В тот самый день, когда я начал чтение моего мемуара, что было к концу 1742 г., г-н Клеро представил свой мемуар, носивший название: «О некоторых общих началах, облегчающих решение большого числа задач динамики». Эта работа, опубликованная в томе мемуаров Академии за 1742 г., была прочтена после моей; к тому же, она не имеет ничего с ней общего“ (D'Alembert. Traité de Dynamique, éd. 1758, p. 72). Такое же столкновение произошло в стенах Парижской Академии 15 ноября 1747 г., когда Клеро и Даламбер одновременно представили свои мемуары о задаче трех тел.

не самый период, а его возмущения; он нашел величину этого возмущения в 600 дней; и раз он ошибся при этом на 30 дней, то относительная ошибка его вычисления есть 1/20.* Разумеется, все это ненужная и злая игра слов. Но так повторялось много раз, и длинный ряд страниц в Journal des Savants за годы 1758—1762 заполнен полемикой этих замечательных людей; здесь несомненно сказалась особенная властность и страстность натуры знаменитого участника движения „Энциклопедистов".**

---

* Даламбер написал на эту тему особый мемуар: Réflexions sur la comète de 1682 et 1759 (Opusc. Mathem., vol. II, p. 218—238 (1761).

** В переписке Эйлера и Лагранжа имеется весьма любопытная и, повидимому, правильная характеристика Даламбера. Эйлер пишет Лагранжу (16 февраля 1765 г.): „Г-н Даламбер сделал мне множество возражений по этому вопросу [теория колебаний струн]; но, признаюсь, я не нахожу их достаточно сильными, чтобы опровергнуть ваше решение. Этот высокий гений, как мне кажется, слишком склонен уничтожать все то, что сделано не им самим"... и далее: „г-н Даламбер повсюду проявляет великое стремление сделать сомнительным все то, что утверждали другие, но он никогда не потерпит, чтобы такие же возражения были сделаны против его исследований" (Oeuvres de Lagrange, vol. XIV, p. 205, 206). — См. также характеристику Даламбера в вышеупомянутом письме Лекселля (Ученая корреспонденция XVIII в., стр. 503). С другой стороны, в этом раздражении Даламбера могла иметь значение трудность его академической карьеры: принятый в адъюнкты в 1741 г., он был как бы забыт французским правительством, и только в 1756 получил звание „сверхштатного пенсионера" (pensionnaire surnuméraire). Пенсию (в 1200 ливров) он получал только от Фридриха II! Об этом странном и несомненно обидном положении общепризнанного ученого, математика и литератора (с 1762 г. Даламбер был избран и членом Французской Академии) многократно говорится в переписке Вольтера и Даламбера; см. особенно его письмо к Вольтеру от 30 июня 1765 г. (Oeuvres de Voltaire, éd. Didot, vol. X, p. 630). Однако здесь же уместно отметить, что для следующего поколения именно за Даламбером сохранился ореол первого математика Франции в XVIII в. Так, в 1807 г. Наполеон передал Национальному институту (т. е. реорганизованной Академии) свое повеление о том, чтобы „в залах заседания Института была поставлена статуя Даламбера — того французского математика минувшего столетия, который больше всех содействовал развитию этой первой из наук" [см. Maindron, op. cit., p. 277]. В связи с этим можно

Эта прискорбная полемика затихла после 1762 г., когда Клеро, как бы собрав все силы, опубликовал статью „Размышления о разногласиях между Даламбером и мной“,* где отвечал на критику и в отношении кометы Галлея и по теории Луны.

Вскоре после этого Клеро в полном расцвете сил, в возрасте 52 лет, скончался от какой-то острой и скоротечной болезни; по описанию, возможно, от тифа. Это произошло 17 мая 1765 г.

Слово его памяти в Академии в том же году произнес, как мы уже упоминали, геометр Фонтэн; он был другом и Даламбера, и Клеро. Но сам Даламбер, который в обеих академиях, во Французской и в Академии Наук, говорил десятки речей, посвященных памяти довольно бледных членов обеих этих коллегий, на этот раз не нашел ни слова, чтобы почтить память своего ближайшего и знаменитого собрата...

Пенсия Клеро по секции механики в том же 1765 г., но не без задержки, перешла, по праву, к Даламберу; он получал ее еще 18 лет и много раз возвращался в своих работах к критике теорий и результатов Клеро.

Ученик Клеро, Бальи, горько переживал внезапную утрату; впоследствии он писал:

„Главная заслуга Клеро был его талант к приложениям. Несмотря на его гений, он не останавливался перед деталями. Он считал, что истина, практически важная, заслуживает предпочтения перед теми, которые остаются погребенными в десятках страниц аналитических вкладок; поэтому он создал одни лишь полезные вещи. Его имя было известно, всюду превозносилось; его будут повторять в веках“.*

только изумиться тому, что ни одно сочинение Даламбера по математике, небесной механике и математической физике не было когда-либо переиздано во Франции!

* Clairaut. Réflexions sur la contestation entre d'Alembert et lui (Journ. des Savants, 1762).

** Bailly. Hist. Astron. Moderne, vol. III, p. 198 (1785). Намек на Даламбера прозрачен. В том же 1765 г. некто Варенн, инспектор налогов,

IV

Из всего творчества Клеро нас интересует здесь ближайшим образом его книга по теории фигуры Земли. Как видно из самого заглавия книги, эта теория основывается в ней на законах гидростатики: в этом ее большая и принципиальная новизна. История гидростатики до XVIII столетия знает великие имена и важнейшие открытия — Архимеда, Галилея, Паскаля. Но все это было, если так можно выразиться, гидростатика „в малом", т. е. преимущественно вопросы о равновесии тяжелых тел, погруженных в жидкость. Но для решения гидростатической проблемы „в большом", — например для определения фигуры жидкой планеты, свободно вращающейся в пространстве, — для этого общих методов и приемов, ко времени появления книги Клеро, еще не существовало. Имелись только отдельные, своеобразные „принципы", предложенные величайшими математиками и механиками XVII столетия — Ньютоном и Гюйгенсом.

В своих „Началах" Ньютон поставил и до конца решил задачу о фигуре равновесия вращающейся жидкой массы, предположив, что жидкость однородная, что все ее частицы взаимно притягиваются по закону всемирного тяготения, и допустив априорно, что жидкая планета имеет фигуру эллипсоида вращения, слабо сжатого по полярной оси. Для своего решения Ньютон ввел понятие „веса" столбов жидкой массы, направленных от полюса и от экватора к ее центру. Эти „веса́" получались у него определенным образом из сил притяжения, действующих на частицы столбов от всей жидкой массы, из длины этих столбов и из центробежной силы, действующей на частицы экваториального столба. Введя это своеобразное понятие „веса", Ньютон утверждал, что для

не оставивший имени в истории науки, задумал писать книгу о Клеро. Он обратился к Вольтеру, и Вольтер ответил ему любопытным письмом, которое мы помещаем в Приложении III.

равновесия жидкой планеты, вращающейся, как твердое тело, вокруг ее полярной оси, необходимо, чтобы „веса“ обоих столбов — полярного и экваториального — были между собой равны.*

Второй принцип, предложенный Гюйгенсом, который не принимал всемирного тяготения и, стоя на позициях Лейбница, допускал лишь притяжение всех частиц жидкости к ее центру, казался гораздо проще ньютонова и гласил, что для равновесия жидкой массы необходимо, чтобы в каждой точке ее поверхности направление силы тяжести (или веса в обычном смысле этого слова, т. е. равнодействующей сил притяжения и центробежной) было направлено по перпендикуляру к поверхности жидкости. Гюйгенс высказал этот принцип в 1690 г. в статье „О силе тяжести“, приложенной к знаменитому „Трактату о свете“.**

То, что каждый из этих принципов был необходим для равновесия, вытекало с очевидностью из рассуждений как Ньютона, так и Гюйгенса. Но был ли каждый из них в отдельности или они оба, взятые совместно, как полагал Бугэ,*** достаточны для равновесия жидкой планеты, этого никто тогда не знал; и Клеро справедливо замечал, что если оба эти принципа друг от друга независимы, то где гарантия, что не имеются еще и другие условия равновесия, совершенно

* Решение Ньютона, поражающее своей глубиной, но весьма сжато у него изложенное, требует и в настоящее время обширных комментариев к тексту знаменитого Предложения XIX из III книги „Начал“. См. примечания А. Н. Крылова в его переводе (собр. трудов, т. VII, стр. 531—535) и статью Л. Н. Сретенского „Ньютонова теория приливов и фигуры Земли“ (сборник „Исаак Ньютон“, стр. 218—225; см. ниже в нашем Комментарии прим. 3, стр. 264—268).

** Гюйгенс, Хр. Трактат о свете (перевод, изд. ОНТИ, 1935); но в русский перевод дополнение о силе тяжести не введено. Traité de lumière avec un discours sur la cause de la pesanteur (Leyden, 1690).

*** J. P. Bouguer. Comparaison des deux lois que la Terre et les autres planètes doivent observer dans la figure que la pesanteur leur fait prendre. Mém. Ac. Sc. Paris, 1734, p. 21—40.

отличные от постулатов Ньютона и Гюйгенса, но столь же необходимые для равновесия?

Весь этот комплекс вопросов Клеро разрешил полностью на первых же страницах своей книги о теории фигуры Земли. Он дал условие, и необходимое и достаточное для равновесия. Вместо двух ньютоновых столбов он рассматривал канал любой формы, взятый в жидкости, замкнутый в себе или заканчивающийся в двух точках ее поверхности, и он утверждал, что равновесие в нем невозможно, если только усилия (efforts) всех частей жидкости, в нем заключенных, не уничтожают друг друга. Что это за таинственные „усилия“ жидкости? Достаточно немного вдуматься в текст книги Клеро, чтобы усвоить, что под этим термином он понимал просто давления, развивающиеся в канале; следовательно, он утверждал, что разность давлений, взятая по всему ходу любого замкнутого канала, в случае его равновесия должна приводиться к нулю. Отсюда немедленно получалось, что разность давлений в любых двух точках канала зависит только от их положения внутри жидкой массы, но не может, в случае равновесия, зависеть от формы канала, между ними проведенного; и далее, отсюда вытекало, что давления в любой точке на поверхности жидкой массы при равновесии должны быть между собою равны, а отсюда весьма просто следовал и принцип Гюйгенса.

Это гениальное в своей простоте соображение „придало гидростатике совершенно иной вид и превратило ее в новую науку“, — так говорит Лагранж в своем очерке принципов гидростатики.*

Разумеется, это открытие бросало яркий свет на принцип и на вычисления Ньютона: то, что он называл „весами“ (pondera) столбов, были просто давления, производимые в центре массы полярным и экваториальным каналами жидкости, и ньютоново условие равновесия оказывалось совершенно интуитивным; но вместе с тем делалось очевидным, что этот

* Аналитическая механика (русск. перев., изд. 1938), стр. 137.

принцип, даже взятый совместно с принципом Гюйгенса, еще недостаточен как условие равновесия (§ 15 первой части книги Клеро).

Но здесь необходимо отметить еще одно существенное и любопытное обстоятельство: чисто физическое соображение, выдвинутое Клеро как условие равновесия, немедленно сочеталось у него с другим открытием, которое он сделал по математическому анализу за три-четыре года перед тем. Эту теорему его мы приведем сейчас дословно по тексту уже пожелтевшей рукописи Клеро, посланной им в Петербургскую Академию вместе с письмом от 17 сентября 1740 г. на имя Эйлера.*

Содержание этой теоремы таково:

„Если $Adx+Bdy$ представляет собой дифференциал какой угодно величины, составленной из x и y и из постоянных, то утверждаю, что̀ дифференциал от A, считая только y переменным и отбрасывая dy, равен дифференциалу от B, предполагая только x переменным и отбрасывая dx, что я выражаю так:

$$\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx}\text{“}$$

Таким образом, мы имеем здесь первую формулировку теоремы о равенстве накрест взятых производных в полном дифференциале функции двух переменных, с той несущественной оговоркой, что Клеро не вводит ни термина, ни специального обозначения для частных производных (см. его примечание к § 17 первой части, стр. 43). Эту именно теорему он

* Рукопись под титулом „Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles“, так же как и письмо Клеро и ответ Эйлера, хранятся в Архиве АН СССР. — Эйлер доложил эту работу Клеро в заседании Конференции 17 октября 1740 г. (Протоколы конференции Академии Наук, т. I, стр. 635, 1897). Клеро опубликовал свою работу на эту тему: Recherches générales sur le calcul intégral (Mém. Ac. Sc. Paris, 1739, p. 425—436) и Sur l'intégration... [и т. д., как в петербургской рукописи] в Mém. Ac. Sc. Paris, 1740, p. 293—323. Подробный разбор этих работ у M. Cantor, loc. cit., Bd. III, S. 883—889.

и применил к условию равновесия каналов в жидкой массе, показав (в главе IV первой части), что элементарное усилие или, — как мы сказали бы теперь, — дифференциал давления на элементе длины канала всегда приводится к дифференциальной форме $Qdx + Pdy$, где Q и P, т. е. проекции действующей силы на перпендикулярные оси, суть функции координат точки x, y, а dx, dy — проекции на те же оси бесконечно малого отрезка канала. Отсюда Клеро приходит к утверждению, что „всякий раз, как будет соблюдено условие:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy},$$

можно быть уверенным, что равновесие будет иметь место в жидкости“ (§ 17 первой части). В конце IV главы Клеро распространяет это условие и на пространственную задачу, вводя проекции сил на три оси координат (§ 46 первой части).

Всеми этими положениями и была, в сущности, создана аналитическая гидростатика; и это тем более изумительно, что фундаментальное для нее понятие давления еще не было систематически введено в науку; этот последний шаг был сделан Эйлером лишь через 12 лет после появления книги Клеро в работе „Principes généraux du mouvement des fluides“,* где применен впервые и самый символ p для обозначения давления. Однако Лагранж в упомянутом очерке дает ясно понять, что эйлеровы уравнения равновесия жидкой массы находятся в теснейшей связи с общим принципом равновесия, данным Клеро. Несомненно к тому же, что и введение в формулировку этого принципа понятия „силовой функции“ со стороны позднейших математиков — например Лежандра — было только естественным развитием основного положения Клеро о том, что в случае равновесия элементарное „усилие“ есть полный дифференциал.

---

* Mém. Acad. Berlin, 1755, p. 274.

Первая часть книги Клеро содержит систематическое развитие этого общего принципа и приложение его к случаям действия на жидкость различного рода сил как простейших, так и более сложных по своему аналитическому выражению. Изучая эту часть, читатель все время должен переводить на современный язык терминологию Клеро: „усилие“ есть элементарное давление dp; „вес части канала“ — это разность давлений на его концах, иными словами, работа приложенных объемных сил на заданном отрезке канала. Разумеется, мы могли бы ввести современные термины в самый перевод; но этим мы исказили бы всю историческую перспективу.

Вместе с тем, имея в виду представить книгу Клеро на общем историческом фоне науки XVIII в., мы должны здесь же подчеркнуть один пробел, оставленный Клеро в формулировке его принципа. Элементарное усилие, как мы видели, должно быть, в случае равновесия, полным дифференциалом некоторой функции от двух (или трех) переменных. Но о свойствах этой функции Клеро не сделал никаких оговорок. С удивительной проницательностью Даламбер (после смерти Клеро) заметил, что если эта функция неоднозначна или если внутри силового поля имеются особые точки этой функции, то равновесие все равно не будет иметь места. Даламбер развил эти замечания в одной части мемуара „О равновесии жидкостей“, опубликованного в 1768 г. Эти страницы из работы Даламбера мы и решили присоединить, как Приложение I (стр. 193—200), к переводу книги Клеро, имея в виду этим показать, что и математики XVIII в. не были безразличны к строгости их формулировок. Поэтому, когда от жизни людей мы переходим к истории научных истин, имена Клеро и Даламбера могут быть снова поставлены не иначе, как одно рядом с другим.

Во второй части своей книги Клеро переходит от общих вопросов к фигурам равновесия жидких планет. В I главе рассматривается случай однородной жидкости. Как мы уже сказали, теория однородных жидких планет была начата Ньютоном;

позднее она была весьма существенно развита Маклореном в „Трактате о флюксиях“, вышедшем в свет всего за год до появления книги Клеро.* Здесь условие равновесия приведено к уравнению, связывающему угловую скорость вращения ω жидкой массы и ее плотность ρ (точнее говоря, отношение ω^2/ρ) со сжатием того эллипсоида вращения, который служит поверхностью уровня жидкой планеты: таким образом, здесь возможность эллипсоидальной фигуры доказана, а не просто допущена, как у Ньютона. Клеро находит метод Маклорена столь „прекрасным и глубоким“, что ведет изложение этой проблемы, следуя почти точно за Маклореном, и дает его уравнение равновесия.

Однако в этой теории жидкой однородной планеты последнее слово принадлежало все же не Маклорену и Клеро, а Даламберу и Лапласу. В мемуаре, опубликованном через тридцать лет после появления книги Клеро, Даламбер провел исследование уравнения равновесия Маклорена—Клеро и доказал, что если при данном значении отношения ω^2/ρ равновесие жидкой массы возможно, то ему будут соответствовать, вообще говоря, не одна, а две фигуры равновесия, иными словами, два эллипсоида вращения с различными сжатиями. Этот мемуар Даламбера** является одним из прекраснейших в его творчестве; он особенно замечателен тем, что в нем впервые ставится вопрос об устойчивости фигур равновесия, так что с ним может быть в известной мере исторически связана теория линейных серий фигур равновесия, созданная впоследствии Пуанкарэ. По этим причинам мы ввели перевод и этого мемуара Даламбера в наше издание, как Приложение II (стр. 201—216).

Все следующие главы второй части книги Клеро посвящены проблеме фигур равновесия неоднородной жидкости, —

---

* Maclaurin. A Treatise of Fluxions, Edinburg, 1742, vol. II, p. 522—566.

** D'Alembert. Sur la figure de la Terre. Opusc. Mathem., vol. VI, p. 47—67.

вопросу, в котором Клеро предшественников совершенно не имел. Эти главы и составляют как-бы самое ядро его книги, ее наиболее существенную часть. Результаты Клеро здесь особенно удивительны в свете дальнейшего развития этой проблемы. Дело в том, что значительно позднее было доказано, что для неоднородной вращающейся жидкой массы эллипсоидальные конфигурации вообще невозможны; но вместе с тем было строго доказано и то, что в первом приближении, если центробежная сила, развиваемая при вращении, настолько мала по сравнению с притяжением, что квадратом отношения этих сил можно пренебречь, то эллипсоидальные конфигурации, как форма равновесия, возможны.* Разумеется, Клеро ничего этого не знал; он просто ограничил себя этим первым приближением и шел обратным путем, т. е. он не разыскивал возможных конфигураций равновесия вообще, а проверял, может ли быть фигурой равновесия эллипсоид вращения, сжатие которого было бы величиной того же порядка малости, как и упомянутое отношение центробежной силы к силе притяжения. Словом, Клеро поступал в отношении неоднородной жидкости совершенно так же, как Ньютон в отношении однородной; но принципиальное различие обоих случаев было то, что ньютоново решение оказалось впоследствии только частным случаем общей теории, не зависимым от каких бы то ни было приближений; в то время как допущение Клеро оказалось приемлемым в той и только в той степени приближения, с которой он его проводил. Действуя этим методом проверки, Клеро не только доказал возможность первого приближения, но и привел условие равновесия эллипсоида к некоторому интегро-дифференциальному уравнению; теоретически говоря, это уравнение дает возможность определить сжатия последовательных слоев неоднородной жидкости, если их плотности заданы как функция расстояния от центра („основное уравнение“ Клеро в § 55 второй части); способ, которым Клеро

* См., например, Poincaré. Figures d'équilibre, p. 65—67.

получал это уравнение, подробно пояснен в нашем Комментарии; разумеется, в настоящее время это уравнение выводится и совершенно иными методами.*

За такую постановку проблемы академик А. М. Ляпунов в наши дни довольно сурово порицал Клеро.** Но, учитывая все сказанное академиком А. М. Ляпуновым, мы должны отметить и то, что Клеро в его эпоху о втором приближении не мог и мечтать; а с другой стороны, что никто не сделал больше, чем сам академик А. М. Ляпунов, для утверждения значения результатов Клеро. Так, в мемуаре 1903 г., применив ко всей проблеме равновесия неоднородной жидкости совершенно новый метод последовательных приближений, не связанный ни с какими допущениями о форме жидкой массы, А. М. Ляпунов в первом приближении получает именно уравнение Клеро;*** а в мемуаре 1904 г., исследуя это уравнение, А. М. Ляпунов показал, что оно допускает решение для функции, определяющей форму слоев, при столь широких предпо-

---

* См. в Комментарии прим. 70 (стр. 323).

** Приводим здесь полностью мнение знаменитого математика из его лекции „О форме небесных тел“ (Изв. Акад. Наук СССР, Отд. физ.-мат. наук, 1930, стр. 38—39): „Клеро, рассматривая неоднородную жидкую массу, вращающуюся весьма медленно, предположил a priori, что поверхности уровня суть эллипсоиды вращения, и занимался лишь разысканием элементов этих эллипсоидов, ограничиваясь первым приближением. Между тем, так задачу ставить нельзя, ибо поверхности уровня в ней не могут быть эллипсоидами, как это и было доказано значительно позже. Можно только сказать, что они мало отличаются от эллипсоидов, но и это только в первом приближении, ибо уже во втором приближении они делаются некоторыми поверхностями вращения четвертого порядка. Таким образом, совершенно неправильно искать элементы эллипсоидов в первом приближении, ибо это суть элементы тех эллипсоидов, которые сами представляют неизвестные поверхности в первом приближении. Таким образом, по самой постановке задачи Клеро не мог итти далее первого приближения“.

*** Изложение этого вывода А. М. Ляпунова см. в нашей статье „Постановка проблемы фигур равновесия в теории А. М. Ляпунова“, в приложении к книге: Аппелль. Фигуры равновесия однородной вращающейся жидкости (перев., 1936), стр 319—336.

ложениях о плотности слоев внутри массы (например, предполагая ее прерывной), которые далеко превосходят по своей общности все то, что могли представлять себе математики XVIII в. Для этого анализа А. М. Ляпунов создал специальный класс интегралов, превращающихся при некоторых частных предположениях в интегралы Стильтьеса. Все эти исследования показали, какую глубокую трактовку все еще допускает старинная проблема Клеро.

Разумеется, та цель, которую преследовал сам Клеро, могла быть и была совершенно иная. Над ним тяготела другая задача: определить теоретически возможные пределы для сжатия Земли, если считать, что она представляет собою неоднородную жидкую планету; этот вопрос был для него тем более острым, что в „Началах“ Ньютона он находил на него ответ; однако правильность этого ответа Клеро принципиально отрицал.

Дело в том, что в 1-м и 2-м изданиях „Начал“ (1687 и 1713 гг.) в конце предложения XIX книги III у Ньютона имелось следующее утверждение:

„Так обстоит все это в предположении, что вещество планеты однородно. Однако, если вещество плотнее у центра, чем по окружности, то диаметр, проведенный от востока к западу, будет еще больше“.

Таким образом, Ньютон утверждал здесь, что сжатие неоднородной планеты должно быть больше, чем у однородной (при одинаковой величине отношения центробежной силы к силе тяжести). Между тем, по теории Клеро получалось как раз обратное. Поэтому в целом ряде мест своей книги* Клеро приводит возражения против этого утверждения Ньютона, не зная, очевидно, что Ньютон впоследствии, повидимому, от него сам отказался, так как он исключил приведенное место из 3-го издания „Начал“ (1725 г.). Кто был здесь прав — Клеро или Ньютон, могли решить только

* Введение ко второй части; §§ 35, 51 второй части.

фактические геодезические измерения. Но, к сожалению, во времена Клеро среди французских геодезистов по этому поводу, — как мы поясняем в Комментарии, — царила совершенная путаница, и вопрос об истинном значении сжатия так и остался мучительной загадкой для Клеро;* только через несколько десятилетий после его смерти, в начале XIX в., была определена почти верная величина сжатия Земли; тогда лишь была установлена правильность всей теории „первого приближения", полученного Клеро. Практически оно оказалось совершенно достаточным и до наших дней.

Наконец, в дальнейшем развитии науки эта же теория получила еще и другое подтверждение. Фигура равновесия определяется, разумеется, полем сил тяготения, развивающихся внутри жидкой массы. Но эта фигура сама находится в поле сил тяготения, развиваемом внешними телами, например Солнцем и Луной; это внешнее поле вызывает определенные движения всей фигуры, например прецессионное движение ее оси. Поэтому возникает вопрос: так как оба эти по́ля, внутреннее и внешнее, едины в своей физической сущности, то нет ли возможности определить фигуру равновесия, по возможности исключив внутреннее поле и воспользовавшись только теми данными, которые определяются либо на самой поверхности Земли (отношение центробежной силы к силе тяжести), либо теми, которые получаются астрономически, как, например, прецессионным движением земной оси; иными словами, нельзя ли так преобразовать „основное уравнение" Клеро,

* Известная доля вины в этой путанице лежит и на самой лапландской экспедиции, так как полученная ею длина градуса дуги меридиана под широтой полярного круга оказалась на 430 м больше действительной. Объяснить происхождение этой огромной ошибки довольно трудно (см.: Красовский. Руководство по высшей геодезии, ч. II, стр. 428, (1942). Так или иначе, сжатие, которое было принято к 1740-му году, было 1 : 178, т. е. почти в два раза больше истинного; оно могло соответствовать первоначальному предположению Ньютона, но никак не теории Клеро (см. прим. 79, стр. 343).

чтобы ввести в него „прецессионную постоянную“, но вместе с тем исключить внутреннее поле, т. е. неизвестное нам распределение масс внутри Земли? Это особенное направление в проблеме Клеро, начатое еще Даламбером в упомянутой уже „Теории предварения равноденствий“ (1749), было закончено только Пуанкарэ; оно привело к одному из самых замечательных результатов всего цикла геодезии и небесной механики, к так называемому определению пределов сжатия Земли через „постоянную прецессии“.* И все это было достигнуто единственно путем некоторых преобразований „основного уравнения“ Клеро: на этом было еще раз показано все неизмеримое богатство результатов, заключавшихся в теории „первого приближения“. Вот почему, заканчивая наш краткий обзор содержания книги Клеро, мы можем только и теперь повторить слова, сказанные о ней более ста лет тому назад Лапласом:**

„Важность всех этих результатов и изящество, с которым они представлены, ставят это произведение в ряду самых прекрасных работ из области математики“.

* См. прим. 71, стр. 328.

** Méc. Cél., t. V, p. 12 (1825).

КОММЕНТАРИЙ

А. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

I. Терминология. В тексте своей книги Клеро почти везде выдерживает следующую терминологию:

1. Gravité — тяготение, гравитация.

2. Attraction — притяжение.

3. Pesanteur — ускорительная сила тяжести.

Под „ускорительными силами" Ньютон и механики XVIII в. понимали силу, действующую на единицу массы, иными словами, напряжение силового поля. Термином „ускорение" они почти совершенно не пользовались.

4. Effort — усилие; это понятие имеет у Клеро тот же смысл, как в современной гидростатике элементарная разность давлений dp на концах элемента ds жидкости. Таким образом, „усилие" надо всегда понимать в смысле выражения

$$dp = \rho\,(Xdx + Ydy + Zdz)$$

где ρ — плотность жидкости, X, Y, Z — проекции действующей на нее ускорительной силы, dx, dy, dz — проекции элемента ds.

5. Poids — „вес" — выражает у Клеро и у Даламбера разность давлений в двух точках (1) и (2) канала, проведенного внутри жидкой массы, т. е. величину:

$$p_2 - p_1 = \int_1^2 \rho\,(Xdx + Ydy + Zdz)$$

Таким образом, „веса́" столбов жидкости, о которых говорится постоянно в первой части книги Клеро, суть давления, производимые на дне столбов силами, действующими на жидкость.

II. Проекции сил на оси. Механики XVIII и начала XIX столетия считали проекции сил положительными, если они направлены против положительного направления оси проекций, т. е. к началу координат. Поэтому,

например, проекции центробежной силы, действующей на частицы жидкости, вращающейся вокруг оси z, у Клеро обозначаются через

$$-\frac{f}{r}x, \quad -\frac{f}{r}y$$

где f — центробежная сила на единицу массы, на расстоянии r от оси вращения; x, y — координаты рассматриваемой частицы. Поэтому элементарная работа (по Клеро — „усилие") центробежной силы есть

$$-\frac{f}{r}(x\,dx + y\,dy)$$

ее „полный вес" равен

$$-\frac{f}{2r}(x^2 + y^2,$$

Соответственно этому, основное уравнение равновесия жидкой массы, вращающейся вокруг оси x, у Клеро имеет вид (см., например, § 52, часть первая)

$$\int (P\,dz + Q\,dy + R\,dx) - \frac{f}{2r}(y^2 + z^2) = A$$

где A — постоянная.

Совершенно так же поступает и Лагранж (см. „Аналитическая механика", русск. перев., изд. 1933, стр. 153); уравнение относительного равновесия вращающейся жидкости имеет у него точно такую же форму, как у Клеро.

III. Старинные французские меры длины. В основе их лежала сажень (туаз, toise); мы даем перевод этих мер в метрическую систему, для нужд геодезических вычислений; в скобках даны логарифмы.

1 туаз	=	1.949040 м	[0 2898207],
1 фут (1/6 туаза)	=	32.4840 см	[1.5116694].
1 дюйм (1/12 фута)	=	2.7070 см	[0.4324883],
1 линия (1/12 дюйма)	=	2.2558 мм	[0.3133070].

Таким образом,

$$1 \text{ туаз} = 6 \times 12 \times 12 = 864 \text{ линиям}.$$

В обиходе применялось еще:

1 почтовое льё (lieu de poste) = 2000 туазов = 4.0 км.

B. ПОСВЯЩЕНИЕ КНИГИ

Морепа — Jean Frederic, comte de Maurepas (1701—1781), сын Жерома Поншартрэна (Jerôme de Ponchartrain), морского министра и министра королевского двора, при котором и была основана в 1666 г. Парижская Академия Наук. Морепа с 17 лет вступил в управление двором, с 1725 г. принял управление флотом. Он живо интересовался научными вопросами, в особенности кораблестроением и навигацией. Под его покровительством прошли обе геодезические экспедиции — перуанская и лапландская. В 1749 г. он был вынужден выйти в отставку. К политической деятельности был возвращен значительно позднее, при Людовике XVI, и был инициатором выступления Франции на стороне Соединенных Штатов в их борьбе за независимость. Похвальное слово его памяти (Éloge) в 1781 г. произнес Кондорсэ.

C. ВВЕДЕНИЕ

1 (стр. 13). Сжатие Земли в системе Гюйгенса. Говоря о „новых картезьянцах", Клеро несомненно имеет в виду Христиана Гюйгенса (1629—1695), который, кстати сказать, был привлечен в число иностранных членов Парижской Академии Наук при самом ее основании в 1669 г. и прожил в Париже до 1681 г. Работа Гюйгенса „О причине силы тяжести" составляет, как мы уже упоминали, дополнение к его „Трактату о свете"; она была издана в Лейдене в 1690 г. Здесь Гюйгенс первый высказал мысль, что Земля не может быть строго сферической, исходя из установленного уже тогда факта уменьшения силы тяжести в направлении к экватору (экспедиция Рише в Кайенну, 1672 г.); но для определения фигуры Земли Гюйгенс предложил некоторую компромиссную теорию, как бы промежуточную между позициями картезьянцев и ньютоньянцев; именно, он допускал возможность действия притяжения, но полагал, что сила притяжения на каждую частицу жидкой массы направлена от этой частицы к центру жидкости; отсюда он получал тот замечательный результат, что, какова бы ни была зависимость между величиной силы притяжения и расстоянием r частицы от центра жидкости, сжатие вращающейся жидкой планеты должно быть всегда равно половине отношения центробежной силы на экваторе к силе притяжения на экваторе, если только это сжатие достаточно мало.

Клеро дает геометрическое доказательство этой теоремы Гюйгенса в § 74 первой части. Выведем ее здесь в современных обозначениях.

Пусть ось Y — ось вращения жидкости, проходящая через ее центр; a и b — ее экваториальный и полярный полудиаметры; разность $a-b$

предполагается весьма малой по отношению к a. Обозначим через ω угловую скорость вращения жидкости, через $f(r)$ интенсивность силы притяжения на расстоянии r от центра; так как эта сила, по предположению, направлена радиально, то основное уравнение гидростатики, принимая плотность $\rho = 1$, будет здесь

$$-f(r)\,dr + \omega^2 x\,dx = dp$$

отсюда, интегрируя от центра до любой точки на поверхности, должны иметь:

$$-\int_0^r f(r)\,dr + \frac{\omega^2 x^2}{2} = \text{const} = C$$

Для определения постоянной положим $r = b$, $x = 0$;

$$-\int_0^b f(r)\,dr = C$$

вычитая из предыдущего уравнения:

$$\int_b^r f(r)\,dr - \frac{\omega^2 x^2}{2} = 0$$

Применяя это уравнение в любой точке на экваторе, где $r = x = a$, получим:

$$\int_b^a f(r)\,dr = \frac{\omega^2 a^2}{2}$$

Ограничиваясь первой степенью разности $(a - b)$, найдем отсюда:

$$(a - b)\,f(a) = \frac{\omega^2 a^2}{2}$$

или, наконец,

$$\frac{a - b}{a} = \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2 a}{f(a)} \tag{1}$$

Слева мы получили „сжатие" планеты; справа — половину отношения центробежной силы на экваторе к силе притяжения на экваторе; это и есть теорема Гюйгенса.

Клеро принимает величину отношения этих сил на экваторе для Земли равной 1:288.5, что и дает ему

$$\frac{a-b}{a}=\frac{1}{577}, \qquad \frac{b}{a}=\frac{576}{577}$$

2 (стр. 15). Ссылка на работу Мопертюи. Клеро упоминает здесь мемуар: Maupertuis. Sur les lois des Attractions (Mém. Ac. Sc. Paris, 1735, p. 343—362); это и есть первая работа французских математиков, относящаяся к законам притяжения. По содержанию она дает лишь некоторое развитие теоремам Ньютона, имеющимся в Отделе XII книги I „Начал“ (О притягательных силах сферических тел).* Но Ньютон рассматривал здесь только случай, когда притяжение пропорционально первой степени расстояния или же обратно пропорционально его квадрату. Мопертюи распространил исследование на случай притяжения, обратно пропорционального любой степени расстояния (не равной 1), и доказал, что задача приводится к вычислению определенных интегралов, распространенных по объему сферического тела. Однако впоследствии Лаплас показал, что из всех законов, для которых сила притяжения есть убывающая функция r, закон обратных квадратов есть единственный, при котором концентрически однородное сферическое тело (шар или сферический слой) притягивает внешнюю точку так, как если бы вся масса этого тела была сосредоточена в его центре, в то время как притяжение слоя на точку в его внутренней полости равно нулю (Laplace, Méc. Cél., Livre II, ch. 2, n. 11).

3 (стр. 16). Сжатие однородного жидкого сфероида по Ньютону. Эта теория изложена в предложении XIX книги III „Начал“ (стр. 531—537 перевода академика А. Н. Крылова); для всего содержания книги Клеро она имеет фундаментальное значение, ввиду чего мы и остановимся на ней детальнее. В основе теории Ньютона лежит доказанная им же замечательная теорема о том, что однородный эллипсоид притягивает всякую внутреннюю его точку с силой, пропорциональной расстоянию этой точки до его центра (Предложение XCI, следствие 3, I книги „Начал“; перевод академика А. Н. Крылова, стр. 275), причем, разумеется, здесь идет речь о проекции силы притяжения на любое направление.

---

* Перевод академика А. Н. Крылова в VII томе собрания его трудов, стр. 244—250.

В теории фигуры жидкой планеты Ньютон исходит из допущения, что жидкость, вращающаяся вокруг оси с постоянной угловой скоростью, может принять форму эллипсоида вращения.*

Примем ось Y за ось вращения, обозначим через ω угловую скорость и через a и b экваториальную и полярную полуось эллипсоида; рассмотрим точку (x, y) с единицей массы в плоскости меридианного сечения; проекции действующей на нее силы притяжения, по теореме Ньютона, равны $-\lambda x$ и $-\mu y$, где λ и μ — две постоянные, зависящие только от сжатия сфероида (полные выражения этих постоянных даны Маклореном; они приводятся и в книге Клеро, §§ 11 и 14 второй части). Учитывая еще центробежную силу $\omega^2 x$, найдем, что элементарная разность давлений в точках (x, y) и $(x+dx, y+dy)$ есть

$$dp = -\lambda x\,dx - \mu y\,dy + \omega^2 x\,dx$$

Отсюда, интегрируя от центра до любой точки x, y на поверхности эллипсоида и учитывая, что давление должно иметь одинаковое значение p_0 на всей поверхности, получим уравнение равновесия сфероида:

$$-\lambda x^2 - \mu y^2 + \omega^2 x^2 = 2(p_0 - p_c)$$

применяя это уравнение к полюсу сфероида $(y=b,\ x=0)$ и к любой точке на его экваторе $(y=0,\ x=a)$, найдем:

$$b^2\mu = a^2(\lambda - \omega^2) \qquad (1)$$

Очевидно, уравнение (1) выражает собой не что иное, как тот принцип, который Клеро называет „принципом Ньютона“, именно равенство давлений в центре эллипсоида под экваториальным и полярным столбами одинакового сечения.

Вводя обозначения Клеро, положим:

притяжение сфероида на единицу массы на его полюсе:

$$P = \mu b$$

притяжение на экваторе:

$$E = \lambda a$$

центробежная сила на экваторе:

$$F = \omega^2 a$$

сила тяжести на экваторе:

$$\Pi = E - F = (\lambda - \omega^2)\,a$$

---

* Эти тела назывались у древних „сфероидами“ — слово, которое авторы XVIII столетия применяли для обозначения как эллипсоидов вращения, так и для фигур равновесия, весьма близких к сфере.

отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе:

$$\varphi = \frac{F}{E-F} = \frac{\omega^2}{\lambda - \omega^2}$$

Уравнение (1) при этих обозначениях приводится к той форме, в которой его дает Клеро, в § 9 второй части, стр. 113, именно:

$$Pb = \Pi a \qquad (2)$$

Дискуссия этого уравнения требует выражения λ и μ через сжатие сфероида. Как мы уже упоминали, она была проведена впервые Даламбером в замечательной работе, которую мы помещаем в приложении II (см. также прим. 42). Но вернемся к Ньютону.

Не имея в своем распоряжении полных выражений λ и μ, Ньютон ограничился только случаем малых сжатий; к тому же свой основной результат для Земли он получил, исходя из некоторого частного численного примера, для которого он взял однородный эллипсоид со сжатием в 1/100, и решал затем задачу для Земли помощью линейного интерполирования. Для того чтобы пояснить сущность метода Ньютона, перепишем (2) в виде

$$\frac{a}{b} = \frac{P}{E}\,\frac{E}{E-F} \qquad (3)$$

Ньютон принимает

$$a = 101; \qquad b = 100$$

и помощью сложных вычислений* находит, что для равновесия этого сфероида силы притяжения на его полюсе и экваторе должны находиться в отношении:

$$\frac{P}{E} = \frac{501}{500}$$

Следовательно, мы получаем здесь, применяя (3):

$$\frac{101}{100} = \frac{501}{500} \cdot \frac{E}{E-F}$$

так что

$$\frac{E}{E-F} = \frac{505}{501}$$

отсюда следует

$$\frac{F}{E} = \frac{4}{505} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{101}$$

* Детали их пояснены в указанной уже статье Л. Н. Сретенского в сборнике „Исаак Ньютон“, стр. 218—225; см. также прим. 63, в конце

Но в данном примере „первое сжатие эллипсоида“, именно отношение $(a-b):a$, равно 1/101. Следовательно,

$$\frac{a-b}{a}=\frac{5}{4}\frac{F}{E} \tag{4}$$

Распространяя этот результат на общий случай однородного эллипсоида, мы можем высказать теорему Ньютона (которую сам он во всей общности не формулировал): сжатие однородного жидкого сфероида равно 5/4 отношения центробежной силы к силе притяжения на экваторе.

Если отбрасывать величины порядка квадрата сжатия и квадрата φ, то в знаменателе левой дроби можно заменить a на b, т. е. вместо первого сжатия ввести так называемое второе $[(a-b):b]$, а в знаменателе правой дроби заменить E на $E-F$, т. е. вместо притяжения на экваторе говорить про силу тяжести на экваторе. Обозначая, по Клеро, второе сжатие однородного эллипсоида через ε, получаем вместо (4)

$$\varepsilon=\frac{5}{4}\varphi. \tag{5}$$

Это соотношение многократно применяется в книге Клеро.

Для получения численного результата для Земли достаточно принять, по Ньютону („Начала“, перев., стр. 532):

$$\frac{F}{E}=\frac{1}{289}$$

Отсюда из (4) найдем, с точностью шестизначного вычисления

$$\frac{b}{a}=\frac{1151}{1156}=\frac{230.2}{231.2}=\frac{230}{231}$$

Таким должно было бы быть отношение полуосей однородной Земли; соответственно этому, Клеро полагает (см. § 20 второй части):

$$\varepsilon=\frac{a-b}{b}=\frac{1}{230} \tag{6}$$

Ньютон получал несколько иной численный результат: не пользуясь теоремой о „пяти четвертях“, он находил сжатие однородной Земли, применяя тройное (или, как он его называет, „золотое“) правило: при величине отношения $F/E=4/505$ второе сжатие равно 1/100; следовательно, при $F/E=1/289$ найдем:

$$\varepsilon=\frac{1}{100}\cdot\frac{505}{4}\cdot\frac{1}{289}=\frac{1}{228{,}91}\infty\frac{1}{229} \tag{7}$$

Очевидно, однако, что значения (6) и (7) можно считать равными с точностью до величин порядка квадрата сжатия.

Выше было доказано, что сжатие сфероида „по Гюйгенсу“ равно $\varphi/2$; следовательно, ввиду (5) оно равно 2/5 сжатия „по Ньютону“. Клеро установил (см. § 65 второй части) замечательную теорему о том, что сжатие неоднородного сфероида, с заданным значением φ, заключено между значениями сжатия по Гюйгенсу и по Ньютону, соответствующими тому же значению φ. При этом предел Гюйгенса эквивалентен допущению о концентрации всей массы в центре сфероида, предел Ньютона — ее равномерному распределению в объеме сфероида. Таким образом, обозначая через δ второе сжатие заданного неоднородного сфероида, имеем:

$$\frac{\varphi}{2} < \delta < \frac{5}{4}\varphi$$

или же

$$\frac{2}{5}\varepsilon < \delta < \varepsilon,$$

где ε — сжатие однородного сфероида для того же значения φ, как и у заданного неоднородного.

4 (стр. 18). Теорема Клеро. В этом месте Введения Клеро излагает содержание знаменитой теоремы, за которой и сохранилось его имя. Полное доказательство ее дано в § 49 второй части, и мы остановимся на нем в соответствующем месте Комментария (прим. 66); здесь же приведем только ее содержание, подчеркивая, что она применима к любым сфероидам, однородным или нет. Сохраняя все предыдущие обозначения, введем еще так называемый „коэффициент Клеро“:

$$\beta = \frac{P - \Pi}{\Pi}$$

или в современных обозначениях

$$\beta = \frac{g_1 - g_0}{g_0},$$

где g_1 и g_0 — ускорения силы тяжести на полюсе (где она совпадает с притяжением) и силы тяжести на экваторе.

„Теорема Клеро“ устанавливает зависимость между величинами

$$\beta,\ \delta,\ \varphi,\ \varepsilon,$$

имеющую место, в силу условий равновесия сфероида при всяком распределении плотностей внутри его.

Все эти величины предполагаются здесь одинакового, именно первого порядка малости; Клеро доказал, что они связаны равенством, точным до их первых степеней включительно

$$\beta + \delta = 2\varepsilon = \frac{5}{2}\varphi \qquad (1)$$

В комментируемом теперь месте „Введения" Клеро и утверждает на основании этой фундаментальной теоремы, что если у неоднородного сфероида

$$\delta > \frac{5}{4}\varphi, \text{ то у него } \beta < \frac{5}{4}\varphi$$

и обратно.

Из (1) следует, что для однородного сфероида, соответствующего тому же значению φ, т. е. при $\delta = \varepsilon$, коэффициент Клеро β получает значение

$$\beta_0 = \varepsilon = \frac{5}{4}\varphi \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем теперь

$$\beta - \beta_0 = \varepsilon - \delta \qquad (3)$$

В этом окончательном ее выражении теорема Клеро имеет тот смысл, что „при всех предположениях относительно ядра, которое покрыто океаном, сжатие Земли настолько же м е н ь ш е той его величины, которая соответствует однородному случаю, насколько общее (относительное) приращение силы тяжести от экватора к полюсу б о л ь ш е того, которое имеет место в случае однородности, и обратно; при этом сумма (относительного) приращения тяжести и сжатия всегда одинакова и равна пяти вторым отношения центробежной силы на экваторе к силе тяжести, что для Земли составляет 1 : 115".*

Эта формулировка теоремы Клеро принадлежит Лапласу.*

5 (стр. 19). Р а б о т а Б у г э о н е о б х о д и м ы х и д о с т а т о ч н ы х у с л о в и я х р а в н о в е с и я. Мы уже упоминали про нее на стр. 249; ей принадлежит определенное значение в истории гидростатики. На примерах, — впрочем, несколько искусственных, — Бугэ показал, что могут быть случаи, когда принцип равенства давлений в центре жидкой фигуры под полярным и под экваториальным столбом или же принцип перпендикулярности направления силы тяжести внешней поверхности, взятые в отдельности, еще не обеспечивают равновесия жидкой массы; поэтому каждый из них не заключает достаточного условия равновесия. Эти исследования несомненно были отправной точкой, от которой Клеро начал свои

---

* Exposition du système du Monde, éd. 1827, p. 331.

изыскания о **необходимых и достаточных условиях** равновесия вращающейся жидкой планеты.

6 (стр. 23). **Вращение жидкости с постоянной угловой скоростью.** Рассуждения, которыми Клеро заканчивает Введение, имеют важное значение; они же могут служить примером того, как механики XVIII столетия, при совершенно неправильной терминологии и неотчетливом выражении основных понятий динамики, все-таки приходили к правильным выводам. Отрезки Mm и mn на фиг. 1, которые Клеро называет „силами", суть в действительности скорости вращающейся частицы; допуская пропорциональность этих скоростей расстояниям QM частиц от оси вращения (эта ось на фиг. 1 проходит через точку Q, перпендикулярно плоскости чертежа), Клеро утверждает лишь то, что вся жидкость вращается с угловой скоростью, одинаковой для всех частиц и постоянной во времени, так как здесь положено $Mm = mn$. Геометрическое изменение скорости, показанное на фиг. 1 отрезком μn, изображает вектор ускорения, которое здесь центростремительное, с проекциями $-\omega^2 x$, $-\omega^2 y$ (принимая ось вращения за ось Qz). Поэтому, если X, Y, Z обозначают проекции силы, действующей на единицу массы, ρ — плотность, p — давление, то уравнения гидродинамики дадут

$$-\omega^2 x = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$-\omega^2 y = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$0 = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Полагая $x^2 + y^2 = r^2$, получаем отсюда:

$$-\frac{\omega^2}{2} d(r^2) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - \frac{1}{\rho}\,dp$$

и условие относительного равновесия **однородной** жидкости приведется к форме

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + \frac{\omega^2 r^2}{2} = \text{const}$$

Все это соответствует в точности утверждениям Клеро: „Если силы μn [т. е. ускорение с проекциями $-\omega^2 x, -\omega^2 y$, 0] происходят от действия силы притяжения [с проекциями X, Y, Z] и если всей жидкости придана форма, необходимая для того, чтобы все ее части находились в равновесии [т. е., чтобы p было постоянно на поверхности], то планета будет вра-

щаться безостановочно вокруг ее оси, не нарушая своего равновесия и не изменяя своей фигуры".

Ко времени появления книги Клеро понятие главных осей инерции еще не было сформулировано; оно было дано только Даламбером в трактате о „Предварении равноденствий" (1749). Поэтому Клеро не делает никаких оговорок в отношении условий, которым должна удовлетворять ось для того, чтобы вращение жидкости могло продолжаться вокруг нее безостановочно. *

D. ПРИМЕЧАНИЯ К ЧАСТИ ПЕРВОЙ

7 (стр. 29). К § 2. Конец этого параграфа имеет следующий смысл: так как давления в точках *F*, *G*, *D* одинаковы, то разность давлений, взятая по сколь угодно малой длине канала, расположенного по поверхности, всегда равна нулю. Следовательно, здесь нельзя говорить об уравновешивании одной части канала другою; остается в силе только условие перпендикулярности направления силы тяжести внешней поверхности (принцип Гюйгенса). В современных понятиях это вытекает просто из того, что поверхности равного давления суть в то же время и поверхности уровня потенциала силы тяжести, и вектор силы тяжести направлен по нормалям к ним.

8 (стр. 31). К § 5. Содержание этого параграфа, к которому тесно примыкают §§ 9 и 16 первой части, имеет большое и принципиальное значение: в них впервые в гидростатику вводится понятие полного дифференциала для элементарного давления как условие, необходимое и достаточное для равновесия жидкой массы; в этом и состояло фундаментальное открытие Клеро. Важно отметить при этом, что единственный механический принцип, которым он здесь пользуется, есть „принцип наклонных плоскостей", известный еще со времен Галилея. Представим себе центробежную силу, действующую перпендикулярно к оси *Y*, т. е. *Pp* на фиг. 5, наподобие груза; пусть dx — вертикальная составляющая отрезка mn, ds — его длина. Тогда составляющая центробежной силы (на единицу массы), взятая по наклонной плоскости mn, будет

$$\omega^2 x \frac{dx}{ds}$$

но масса элемента mn равна $\rho d\sigma ds$, где ρ — плотность однородной жидкости и $d\sigma$ — сечение канала. Поэтому „движущая сила", отнесенная к единице

* Более детальная теория относительного равновесия дана у Аппелль. Фигуры равновесия (перев. 1936, стр. 43 и сл.); Пицетти. Основы механической теории фигуры планет (перев. 1933, стр. 89 и сл.).

площади, даст „элементарное усилие“, т. е. элементарную разность давлений на концах mn:

$$dp = \rho\omega^2 x\, dx$$

Интегрируя, получим „полный вес“ канала, вызванный центробежной силой

$$p_b - p_a = \frac{\rho\omega^2}{2}(x_b{}^2 - x_a{}^2)$$

Таким образом, этот „вес“ не зависит от формы канала ab и определяется только расстоянием его концов от оси вращения.

9 (стр. 32). К § 6. Согласно прим. 8, „полный вес“ замкнутого канала, поскольку он вызывается центробежной силой, выразится криволинейным интегралом:

$$\oint dp = \frac{\rho\omega^2}{2} \oint dx^2$$

и, очевидно, приведется к нулю.

10 (стр. 36) К § 10. В том месте работы Мопертюи, на которую ссылается Клеро, * происхождение кольца Сатурна объясняется тем, что когда комета, испускающая хвост, который представляет собой „огромный поток пара“, приближается к какой-либо планете, то притяжение этой последней „заставляет поток свернуть с его пути и вынуждает его обращаться вокруг планеты по некоторому эллипсу или по окружности; а так как комета все время извергает новое вещество, то образуется непрерывное его движение или нечто вроде кольца вокруг планеты“. Эта своеобразная и примитивная „гипотеза захвата“ и получает у Клеро снисходительное название „остроумного объяснения“.

Заметим здесь же, что доказательство возможности существования кольцевых фигур равновесия жидкости, все частицы которой гравитируют по закону Ньютона (и притом кольцевых фигур как с центральным ядром, так и без него), является одной из сложнейших проблем космогонии, которой посвящены работы Лапласа, Пуанкарэ, Софьи Ковалевской, Л. Лихтенштейна ** и других математиков. Разумеется, все, что сказано в книге Клеро об этой проблеме, относится к младенческому периоду математической космогонии и сейчас не представляет реального интереса.

11 (стр. 37). К § 12. Клеро очень редко применяет термин „поверхность“ и почти всегда, как и в данном случае, говорит про „кривую“ (courbe), имея в виду преимущественно поверхности вращения и подразумевая под кривыми границы их меридианных сечений.

---

* Maupertuis. Discours sur les différentes Figures des Astres, Oeuvres (éd. 1768), vol. I, p. 154—160.

** Этим автором дано первое полное доказательство возможности существования однородной кольцевой фигуры без центрального ядра.

12 (стр. 38). К § 12. Клеро совершенно правильно подчеркивает здесь особенную трудность определения поверхности, могущей служить внешней границей вращающейся гравитирующей жидкой планеты. Пусть T означает объем, ограниченный этой поверхностью S. Обозначим через V потенциал притяжения, развиваемого всеми массами, заключенными внутри S; условие равновесия, т. е. условие постоянства давления на S, приводит к уравнению, выражающему, что значения потенциала V, увеличенного на потенциал центробежных сил $\left(\text{имеющий вид } \frac{\omega^2}{2} d^2, \text{ где } d — \text{расстояние точки поверхности } S \text{ от оси вращения}\right)$, приводится к постоянной на всей поверхности S. Но так как вычисление потенциала V зависит от формы искомой поверхности S, то здесь возникает задача, для решения которой математический анализ никакими общими методами не обладает. Отсюда происходит, что нам до настоящего времени известны только некоторые частные и как бы „случайные", во всяком случае простейшие формы фигур равновесия (например, эллипсоиды в случае однородной жидкости и фигуры к ним близкие, или фигуры, близкие к сфере, в случае неоднородной); но никакой общей теории фигур равновесия, которая позволяла бы о т к р ы в а т ь такие фигуры, мы не имеем.

13 (стр. 39). К § 13. Клеро утверждает, что, допустив наличие твердого ядра любой формы, окруженного неоднородными жидкими массами, можно доказать возможность существования планеты любой формы, хотя бы и удлиненной по оси вращения; но эти соображения не убедительны, так как они совершенно не затрагивают вопроса об устойчивости вращения подобного сфероида; удлиненными жидкими планетами с твердым ядром много занимались математики XVIII в., в особенности Даламбер; в настоящее время они не могут привлекать внимания. См. ниже, во второй части, §§ 31—34.

14 (стр. 40). К § 14. Обозначим через p_a, p_b, p_c, p_d давления в соответствующих точках на фиг. 11; для равновесия должны быть соблюдены условия: $p_a = p_b$; $p_c = p_d$, откуда $p_a - p_c = p_b - p_d$; но так как сила притяжения, действующая на ac, не равна, по предположению, силе, действующей по bd, то это равенство невозможно, и равновесие не будет иметь места.

15 (стр. 41). К § 15. Центральная сила представлена на фиг. 12 отрезком MI, полученным соответственно принципу Гюйгенса. Введем полярный угол $MCP = \theta$ и допустим, что $MI = \Psi(\theta)$. Если полярное уравнение кривой EMP есть $r = f(\theta)$, то вместо $\Psi(\theta)$ можно принять, например, для центральной силы такое выражение:

$$[f(\theta) - r]^n \varphi(\theta) + \Psi(\theta); \quad n > 0$$

где $\varphi(\theta)$ есть произвольная функция; в точках кривой EMP это выражение обратится в $\Psi(\theta)$, и принцип Гюйгенса будет удовлетворен. Для соблюдения принципа Ньютона требуется, чтобы вес столба MC приводился к постоянной, т. е. не зависел от θ; но этот вес равен

$$\int_0^{r=f(\theta)} \{[f(\theta)-r]^n \varphi(\theta)+\Psi(\theta)\}\, dr = \frac{\varphi(\theta)\, f(\theta)^{n+1}}{n+1} + f(\theta)\,\Psi(\theta) = \text{const}.$$

Если из этого условия определить функцию $\varphi(\theta)$, то и принцип Ньютона будет удовлетворен; однако равновесие здесь невозможно, как установлено в § 14.

16 (стр. 43). К § 16. Здесь понятие полного дифференциала, уже примененное в § 5 для элементарного усилия, возникающего от центробежной силы, распространяется на любые объемные силы, действующие на жидкую массу и допускающие ее равновесие. Составляющая ускорительной силы P, действующей по SH (фиг. 13), взятая по направлению наклонной Ss, равна

$$P\frac{dy}{ds}$$

где

$$dy = sr, \quad ds = Ss$$

Умножая на массу элемента ds, равную $\rho d\sigma\, ds$ (см. прим. 8), найдем, что сила, действующая на массу элемента канала Ss, есть

$$\rho P\, dy\, d\sigma$$

Введя такую же составляющую от силы Q и отнеся получаемое усилие к единице площади, получим для элементарной разности давлений на концах элемента Ss выражение:

$$dp = \rho\,(P\, dy + Q\, dx)$$

оно и является основой всей гидростатики; для однородной жидкости (в этом случае Клеро всегда полагает $\rho = 1$) из принципа уравновешивания замкнутых каналов вытекает, что выражение $P dy + Q\, dx$ должно быть полным дифференциалом, и Клеро прилагает к нему ту самую теорему, о которой он сообщал в 1739 г. в письме к Эйлеру (см. стр. 251). Термином „частная производная" Клеро еще не пользуется, и он говорит в примечании к § 17 о дифференциале функции P, взятом, „считая только x переменным и отбросив от дифференциала множитель dx".

17 (стр. 45). К § 17. Уравнение равновесия, к которому Клеро приходит в конце этого параграфа, в современных обозначениях, принимая плотность $\rho = 1$, можно написать:

$$\int (X\,dx + R\,dr) + \frac{\omega^2 r^2}{2} = p_0 - p_c$$

где X — проекция единичной силы на ось вращения, R — ее проекция на перпендикуляр к оси вращения, r — расстояние частицы M на поверхности от оси, ω — угловая скорость вращения жидкой массы, p_0 — постоянное давление на поверхности и где интеграл взят по любому пути от центра до точки M. Если обозначить этот интеграл, как функцию координат точки M, через $U(x, y)$, то здесь естественно возникает понятие силовой функции поля, и уравнение равновесия принимает вид

$$U(x, y) + \frac{\omega^2 r^2}{2} = \text{const.}$$

причем

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad R = \frac{\partial U}{\partial r}$$

Однако этого дальнейшего шага, столь очевидного для нас теперь, Клеро не сделал; понятие силовой функции было введено в науку только через несколько десятилетий после появления его книги.

18 (стр. 45). К § 19. Понятие уровенных поверхностей было формулировано впервые Маклореном (Maclaurin. A Treatise of Fluxions, 1742, § 640), где установлено основное их свойство, состоящее в том, что равнодействующая силы притяжения и центробежной направлена в каждой точке уровенной поверхности по нормали к ней. Даламбер в своем „Es... sur la résistance des fluides“ говорит: „Г-н Маклорен первый ... поверхности,... к которым сила тяжести перпендикулярна ... он называет уровенными“ (p. 202).

19 (стр. 46). К § 21. Пусть U и U' — посто... ...чения силовой функции на двух бесконечно близких уро... ...оверхностях; ζ — расстояние между ними, считая по об... ...али от точки P на первой поверхности до точки P' на ... тогда с точностью до первого порядка расстояния ζ

$$U' = \quad \frac{\partial U}{\partial n}\zeta$$

Но, обозначая через g ускорение си... тяжести, имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial n} =$$

так что

$$g\zeta = U' - U = \text{const}$$

откуда и следует утверждение Клеро, что расстояние ζ обратно пропорционально напряжению силы тяжести в точке P.

20 (стр. 49). К § 22. В этом параграфе Клеро с замечательным искусством доказывает теорему, обратную предыдущей: если расстояние между двумя бесконечно близкими поверхностями уровня обратно пропорционально интенсивности действующей силы, то выражение элементарного давления $dp = R\,dy + Q\,dx$ представляет собою полный дифференциал; В этом доказательстве он как бы нащупывает понятие силовой функции. В первой части его устанавливается, что если dx и dy суть проекции бесконечно малого перемещения Mm по самой поверхности уровня, то $R\,dy + Q\,dx = 0$, а это эквивалентно утверждению: $dU = 0$ по поверхности уровня. Далее, отрезок $M\mu = \zeta$ (в обозначениях прим. 19) и для него Клеро получает в заключительной формуле выражение:

$$\zeta = \frac{da}{\omega g}$$

здесь da — разность постоянных значений, соответствующих обеим поверхностям уровня; $g = \sqrt{R^2 + Q^2}$, т. е. интенсивность силы поля, ω — интегрирующий множитель дифференциала $R\,dy + Q\,dx$; отсюда „элементарное усилие“ на отрезке ζ, или „вес“ элементарного цилиндра равен

$$g\zeta = \frac{da}{\omega}$$

Но, по § 21, $g\zeta = \text{const.}$, следовательно $\omega = \text{const.}$, и dp есть полный дифференциал. Заметим, что речь идет здесь только об однородной жидкости.

21 (стр. 51). К § 25. Текст Клеро: „la liqueur ne pesant point à cause du niveau de ces deux branches“, очевидно, в современной терминологии обозначает, что давление на всех точках бесконечно тонких каналов, взятых на уровенной поверхности, одинаково.

22 (стр. 53). К § 27. В обычном случае „жесткого“ вращения

$$X = \omega x$$

и уравнение Клеро приводит к параболе

$$y - y_0 = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$

где $y - y_0 = OR$ (фиг. 16).

Сочинения, на которые здесь ссылается Клеро, следующие:

1) Daniel Bernoulli. Hydrodynamica. Argentorati (Strassbourg), 1738.

2) Jac. H e r m a n n. Phoronomia, sive de viribus et motibus corporum solidcrum et fluidorum, libri duo. Amstelodami, 1716.

23 (стр. 55). К § 27. Содержание этого параграфа исторически весьма важно, так как из него ясно обнаруживается, что Клеро знал прием вычисления силовой функции центральных сил, интенсивность которых зависит только от расстояния. Разумеется, речь идет лишь о притяжении к неподвижному центру (распространение теоремы на случай подвижных центров притяжения принадлежит Лагранжу). Ужасающая фигура 17 показывает, насколько трудно было до изобретения начертательной геометрии передать отчетливо простейшее пространственное построение. Для пояснения его заметим, что начало координат взято в C на оси вращения; координаты притягивающего центра H суть $(-a,\ b,\ -c)$, а координаты притягиваемой точки $M\ (x,\ y,\ 0)$.

Таким образом:

$$\overline{HM}^2 = r^2 = (x+a)^2 + (y-b)^2 + c$$

$$dr = \frac{x+a}{r}dx + \frac{y-b}{r}dy$$

Если действующая сила притяжения есть

$$F = \alpha r^n; \quad a = \text{const}, \quad r \neq -1,$$

то

$$F_x = \alpha r^{n-1}(x+a)$$

$$F_y = \alpha r^{n-1}(y-b)$$

и потому (так как здесь $dz = 0$)

$$F_x\,dx + F_y\,dy = \alpha r^n\,dr = F\,dr$$

Отсюда и следует, что „полный вес“ канала, выражаемый интегралом от предыдущего выражения, есть

$$\frac{\alpha r^{n+1}}{n+1} = U(r)$$

Если бы Клеро заметил еще, что здесь, как это совершенно очевидно,

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

то он открыл бы и новую главу в теории притяжения, как он это сделал в гидростатике.

24 (стр. 58). К §§ 33—34—35. Задача на нахождение силовой функции для сил, направленных по нормали к заданным поверхностям или кривым, имеет в наши дни не более как интерес математического упражнения. Однако она приводится еще в трактатах аналитической механики.* В § 33 Клеро, наряду с заданной директрисой притяжения $KLkl$ (фиг. 19), рассматривает еще и кривую $RSrs$, предполагая, что обе они являются развертками одной общей им обеим эволюты; поэтому нормали к первой из них пересекают по нормалям и вторую, и расстояние между соответствующими точками обеих этих кривых, считаемое по общей нормали, остается постоянным. Вычисление, которое Клеро проводит в § 34, основано на следующем тождестве: положим [фиг. 20]

$$VM^2 = r^2 = (x - z)^2 + y^2$$

тогда, при переменном $z = CV$,

$$r\,dr = (x - z)(dx - dz) + y\,dy$$

так что

$$\frac{y\,dy + (z - x)\,dx}{r} = dr + \frac{(x - z)\,dz}{r} = dr - dq$$

если обозначить через q отрезок VN; интеграл от этого выражения дает отрезок

$$VM - VN = NM$$

Этот же результат можно получить проще, обозначив через x, y координаты M и через x', y' координаты N; полагая

$$\overline{NM}^2 = u^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$$

имеем

$$u\,du = (x' - x)(dx' - dx) + (y' - y)(dy' - dy)$$

но NM есть нормаль к заданной кривой в точке N; поэтому

$$(x' - x)\,dx' + (y' - y)\,dy' = 0$$

и, следовательно

$$du = -\frac{(x - x')\,dx + (y - y')\,dy}{u}$$

Проекции силы F равны здесь

$$F_x = F\,\frac{x' - x}{u}, \qquad F_y = F\,\frac{y' - y}{u}$$

---

* Appell. Traité de Mécanique Rationelle, vol. I (éd. 1926), p. 124.

и поэтому

$$F_x\,dx + F_y\,dy = -F\,du$$

следовательно, „элементарное усилие" будет полным дифференциалом, если сила F (которую Клеро обозначает здесь через P) будет либо постоянной, либо функцией от u. Таким образом, давление в каждой точке определяется как $-\int F du$, и уровенная поверхность получается, если придать давлению постоянное значение.

25 (стр. 61). К § 36. Вес канала OT (фиг. 21) здесь, как и в других местах, означает работу сил поля вдоль OT; но, поскольку эта сила перпендикулярна к OT, „полный вес" канала приводится к нулю. Кривые OT, SZ и sz на черт. 21 — развертки одной и той же эволюты, иначе говоря, „параллельные кривые", для которых расстояния между соответственными точками на общих нормалях равны. Заметим, что во всем этом разделе Клеро ограничивается случаем „директрисы" в виде заданной кривой, лежащей в меридианном сечении фигуры равновесия, которая поэтому может быть только поверхностью вращения.

26 (стр. 65). К § 40. Кривая SHR на фиг. 23 (так же как и кривая $RSrs$ на фиг. 19) есть наименьший овал, имеющий общую эволюту с директрисой LNK. Так как на отрезке VR постоянная по величине сила направлена по нормалям к SR, то работа ее, при движении точки приложения силы по VR, будет равна, по Клеро, отрезку нормали VH. Затем $NH = RK$ по свойству разверток одной и той же эволюты; следовательно, работа силы по VK или „вес" столба VK будет $VH + HN = VN$, в чем и состоит утверждение Клеро в этой несколько необычной задаче.

27 (стр. 66). К § 41. В главе VIII Клеро рассматривает условие равновесия фигур вращения в полярных координатах; в более привычных нам обозначениях основное уравнение здесь будет

$$\int (R\,dr + Tr\,d\theta) + \frac{\omega^2}{2} d^2 = A, \qquad (1)$$

где R и T — проекции действующей силы на радиус-вектор и на перпендикуляр к нему; d — расстояние частицы от оси вращения, r и θ — полярные координаты той же частицы.

Следовательно, для равновесия должно быть соблюдено условие полного дифференциала:

$$\frac{\partial (Tr)}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial \theta}$$

(у Клеро R и r обозначаются через P и y, T и θ через Q и x).

28 (стр. 68). К § 45. Клеро обращает внимание на то, что условие равновесия в только что написанной форме (прим. 27 формула 1), соот-

ветствующее принципу Гюйгенса, может давать результат, не совпадающий с условием равновесия столбов, по Ньютону. Так как сила T, направленная перпендикулярно к радиальному столбу жидкости, не дает „веса“, т. е. работы по длине столба, то для соблюдения принципа Ньютона достаточно удовлетворить условию:

$$\int_0^r R\,dr = \text{const.} \qquad (1)$$

Клеро приводит следующие примеры:

$$R = r\theta^2, \quad rT = r^2\theta$$

или

$$R = \frac{\theta}{\sqrt{a^2 + r\theta}}, \quad rT = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r\theta}}$$

Здесь условие полного дифференциала, очевидно, соблюдено (в первом случае $U = \frac{1}{2} r^2\theta^2$, во втором $U = 2\sqrt{a^2 + r\theta}$), и интегрирование полного дифференциала дает тот же результат, что и интегрирование функции R по r, считая в ней θ постоянной; но в следующем примере, где берется

$$R = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \theta^2}}, \quad rT = \frac{\theta}{\sqrt{r^2 + \theta^2}}$$

и где, следовательно, $U = \sqrt{r^2 + \theta^2}$, интегрирование одной составляющей R по правилу Ньютона, считая θ постоянной, дает

$$\int R\,dr = \sqrt{r^2 + \theta^2} - \theta = \text{const.} \qquad (1)$$

т. е. результат, отличающийся на $-\theta$ от интеграла полного дифференциала. Происходит это, очевидно, потому, что в начале координат трансверсальная проекция силы, именно

$$T = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\theta}{\sqrt{r^2 + \theta^2}}$$

имеет особую точку типа полюса (или „источника“), так что вычисление работы силы, начиная от этой точки, невозможно. Но Клеро видит в этом „парадокс“ и стремится устранить его, прибавляя к только что вычислен-

ному интегралу еще и $\int Tr\,d\theta$, взятый вокруг начала по дуге окружности радиуса a, который затем стягивается к нулю; тогда

$$\lim_{a\to 0}\int Tr\,d\theta = \lim_{a\to 0}\left(\sqrt{a^2+\theta^2}-a\right)=\theta. \qquad (2)$$

В сумме с интегралом (1) это и должно, по мысли Клеро, восстановить однозначность интегрирования. Но эти соображения Клеро, конечно, неубедительны; тем более, что ни в одном из данных им примеров силовая функция, зависящая от θ, не однозначна, и интеграл по любому контуру вокруг начала координат не может обратиться в нуль.

На эти недостатки рассуждений Клеро указал Даламбер в мемуаре 1768 „О равновесии жидкостей", извлечение из которого мы и прилагаем в переводе к тексту книги Клеро (см. стр. 193—200). Здесь Даламбер вполне ясно установил правило независимости криволинейного интеграла от пути с надлежащей строгостью, введя условие о том, что силовая функция поля должна быть однозначной и непрерывной вместе с ее частными производными внутри и на границе контура. Любопытно отметить здесь только, что сам Клеро, приводя примеры полных дифференциалов в примечании к § 16, дал пример простейшей силовой функции, именно

$$U(r,\theta)=\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

не удовлетворяющей условию однозначности во всякой области, заключающей начало координат (см. прим. 85, стр. 347).

29 (стр. 75). К § 48. Здесь применяется то же правило наклонных плоскостей, которым Клеро пользовался уже в § 12 и 16 для плоского случая.

30 (стр. 77). К § 53. Это глубокое замечание Клеро получило подтверждение только в 1834 г., когда Якоби „из духа противоречия", — как он говорил, * — открыл возможность существования фигур равновесия однородной жидкости в форме трехосных эллипсоидов, вращающихся вокруг их наименьшей оси.

31 (стр. 79). К главе X. В этой главе Клеро развивает теорию капиллярных явлений, которую он первый подверг математической трактовке. Но содержание ее настолько далеко от основной темы его книги, что нет оснований подвергать ее здесь детальному анализу. Отметим лишь то, что положительное ее значение несомненно, как это отметил, например, Максвелл в статье „Capillary Action" (Enc. Britannica, 9th ed.): „Клеро, пови-

---

* Розенбергер. История физики, часть III, вып. 1 (1935), стр. 234.

димому, был первым, кто указал на необходимость учета притяжения между частицами самой жидкости, чтобы объяснить явления. Однако он не уяснил себе, что расстояния, на котором это притяжение заметно, являются не только малыми, но и совершенно неощутимыми (altogether insensible)".

Наиболее подробное рассмотрение теории Клеро было дано Лапласом; * мы приведем его мнение полностью:

„Клеро излагает в своей книге теорию капиллярного действия; но эта теория представляется мне незначительной (insignifiante). Рассматривая цилиндрическую трубку с очень малым внутренним диаметром, опущенную вертикально нижним концом в жидкость, он учитывает все силы, которые действуют на бесконечно тонкий столб жидкости, проходящий через ось трубки, допуская при этом наличие притяжения молекул трубки на молекулы жидкости и молекул жидкости самих на себя, причем закон притяжения выражается в обоих случаях одной и той же функцией расстояния, но может быть различным по интенсивности. После этого Клеро отмечает, что между всеми возможными законами притяжения должен существовать один или несколько таких, при которых повышение жидкости в трубке получается, согласно с опытом, обратно пропорциональным внутреннему диаметру трубки. Трудность задачи заключается именно в определении этих законов. Это я и сделал, — продолжает Лаплас, — в моей теории капиллярного действия,** из которой вытекает, что все те законы притяжения, при которых оно становится нечувствительным (insensible) на сколько-нибудь заметных расстояниях, единственно только и могут удовлетворить наблюдениям. Но Клеро был тем более далек от этого результата, что, по его мнению, притяжение трубки на жидкость действует еще и на жидкие частицы, находящиеся на оси трубки. Однако из этого ложного допущения он все-таки пришел к результату, правильность которого я доказал, именно, что жидкость всегда поднимается в трубке над ее уровнем, если только удвоенная сила притяжения молекул трубки на молекулы жидкости будет больше, чем сила притяжения молекул жидкости друг на друга. Это не единственный пример того, как неверное допущение приводит к истинам; однако открытие их принадлежит только тому, кто их доказал".

Быть может, именно в силу этих слов автора „Небесной механики", за одним из основных законов теории капиллярных явлений утвердилось название „закона Лапласа", а не закона Лапласа — Клеро (см. § 60 в книге Клеро).

* Laplace, Oeuvres, vol. V, p. 12 (Mec. Cél., Livre XI).

** Она включена Лапласом в содержание его „Небесной механики" и составляет приложение к X книге.

Полную теорию явлений капиллярности можно найти в замечательной статье Г. Минковского.*

32 (стр. 91). К § 68. Эти соображения Клеро не отличаются отчетливостью. Из открытой им теоремы о том, что в случае равновесия жидкой массы выражение для „элементарного усилия" приводится к полному дифференциалу

$$\rho (X dx + Y dy + Z dz) = dp,$$

вытекает, что достаточным условием равновесия неоднородной жидкости является существование однозначной и регулярной силовой функции (или потенциала) U; в этом случае $dp = \rho dU$; при этом условии поверхности постоянного давления, называемые уровенными, — к числу которых относится и внешняя поверхность, — являются вместе с тем и эквипотенциальными. В таком случае (он осуществляется, например, для сил, действующих по закону всемирного тяготения) плотность ρ является функцией от U, так что уровенные поверхности суть и поверхности постоянной плотности. Гидростатическое давление p должно быть положительно во всей жидкой массе или, в крайнем случае, обращаться в нуль в отдельных точках, линиях или поверхностях. Все эти положения были выяснены в основном после выступлений Даламбера, считавшего, что в неоднородной жидкости поверхности уровня вообще не должны совпадать с поверхностями одинаковой плотности. Однако впоследствии, после замечаний Лагранжа, Даламбер признал, что его утверждение ошибочно, если речь идет о силах притяжения. (Обо всем этом см. ниже, в прим. 82.) Заметим еще, что Клеро неоднократно высказывал то положение, что более плотные части жидкости должны находиться ближе к ее центру. Теоретически это условие не необходимо для равновесия, и оно может иметь значение только для устойчивости жидкой массы. Против этого допущения Клеро Даламбер тоже возражал;** но его принимал Лаплас (Méc. Cél., livre III, n° 29—35; оно вводится и в современных теориях фигур жидких планет; так, Ляпунов (в мемуаре 1904 г., см. прим. на стр. 227) подчинял плотность жидкой планеты только тому условию, что она есть конечная, положительная и невозрастающая функция, от центра до внешней поверхности, отнюдь не предполагая ее непрерывной.

33 (стр. 92). К § 70. До сих пор в этой главе шла речь о силах притяжения, происходящих от отдельных центров или действующих перпендикулярно „директрисам", как в главах V и VI. Теперь Клеро перехо-

* H. Minkowski. Die Kapillarität. Encyclop. der Math. Wissenschaften, Bd. V (9), S. 558.

** D'Alembert. Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, 1744, p. 36.

дит к жидким планетам, все частицы которых гравитируют друг к другу, и поясняет, что в случае неоднородной жидкости условия могут оказаться совершенно иными, чем для однородных. Эти несколько общие замечания Клеро получили замечательное подтверждение в дальнейшем развитии теории, так как впоследствии было доказано, что неоднородная жидкая планета, в отличие от однородной, не может состоять из концентрических и гомотетических (т. е. подобных и подобно расположенных) слоев какой угодно формы; так, например, для нее, в общем случае невозможна и эллипсоидная стратификация;* только в предположении „весьма медленного“ вращения наслоение неоднородной планеты может состоять из „сфероидов Клеро“, отличающихся от эллипсоидов вращения на величины порядка квадрата сжатия. О них и будет речь во второй части книги Клеро (§ 55 и сл.).

34 (стр. 95). К § 74. Здесь содержится доказательство теоремы Гюйгенса о величине сжатия планеты, при любой зависимости силы притяжения от расстояния, но при допущении что притяжение во всех точках планеты направлено радиально к ее центру. На фиг. 32, несколько необычной для современного читателя, экваториальная полуось планеты $a = CE$, полярная полуось $b = CP$, кривая KL дает силу притяжения $\varphi(r)$ в функции от расстояния точки от центра C; на этой же фигуре справа $EK = \varphi(a)$, $pk = \varphi(b)$, и потому

$$\int_b^a \varphi(r)\,dr = \text{площадь } KEpk.$$

Этот интеграл выражает избыток „веса“, т. е. разность работ силы притяжения по экваториальному и полярному столбу. Центробежная сила в точке экватора E есть $\omega^2 a$, и ее работа $\frac{1}{2}\omega^2 a^2$ представлена треугольником EFC, так как $EF = \omega^2 a$.

Приравнивая, получаем приближенно:

$$(a - b)\,\varphi(a) = \frac{\omega^2 a^2}{2}$$

откуда выводится величина сжатия

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2 a}{\varphi(a)} = \frac{1}{2}\,\frac{EF}{EK}$$

Таким образом, Клеро графически дает по существу то именно доказательство теоремы Гюйгенса, которое было приведено выше, в Комментарии к Введению (стр. 262—263).

* Wavre. Figures Planétaires et Géodésie, ch. III (p. 57—62).

35 (стр. 96). К § 76. Пример определения директрисы силы тяжести по сжатию земного меридиана (форма которого здесь задается в виде эллипса) и по изменению силы тяжести на земной поверхности, взятый сам по себе, не представляет ни теоретического, ни практического значения. Но он интересен тем, что в нем мы встречаемся с одним приемом, которым Клеро неоднократно пользуется в дальнейшем. Пусть дана точка M на эллипсе PME; сила тяжести направлена по нормали к эллипсу и изображается на фиг. 33 отрезком MK; отрезок KL служит мерой центробежной силы в M, так что в силовом треугольнике KML отрезок ML изображает силу притяжения в M, которая, по предположению, направлена по нормали к директрисе PHF. Для определения формы директрисы нужно найти отношение CL/QM. С этой целью найдем прежде всего величину отрезка CK. Уравнение нормали к эллипсу PME с большой полуосью $a = CE$ и малой $b = CP$ имеет вид

$$\frac{a^2(x'-x)}{x} = \frac{b^2(y'-y)}{y}$$

где x, y — координаты точки M, x' и y' — бегущие координаты нормали.

Для точки K имеем:

$$y' = 0, \quad x' = CK = x\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = QM\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

Но если введем „второе сжатие" меридианного эллипса

$$\delta = \frac{a-b}{b}$$

то, отбрасывая δ^2, найдем

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - 2\delta$$

так что по предыдущему:

$$\frac{x'}{x} = \frac{CK}{QM} = 2\delta \tag{1}$$

Это и есть формула, которой постоянно пользуется Клеро, рассматривая эллипсы с малым сжатием.

Из нее получаем:

$$\frac{CL}{QM} = \frac{CK}{QM} - \frac{KL}{QM} \tag{2}$$

Величина второго отношения неизвестна; но Клеро принимает приближенно, что имеет место пропорция:

$$\frac{KL}{QM} = \frac{EF}{EC}$$

в правой части здесь стоит отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе, т. е. $^1/_{288}$; поэтому, подставляя в (2) значение $\delta = {^1/_{177}}$ (об этой величине см. прим. 79) имеем:

$$\frac{CL}{QM} = \frac{2}{177} - \frac{1}{288} = \frac{1}{127.75}$$

что Клеро представляет в виде

$$\frac{CL}{QM} = \frac{2}{255} \qquad (3)$$

С другой стороны, точка F на фиг. 33 взята так, что

$$\frac{CF - CP}{CP} = \frac{1}{255}$$

Поэтому директрису PHF можно принять тоже за эллипс со сжатием

$$\delta' = \frac{1}{255}$$

Учитывая теперь, что ML есть нормаль к этому эллипсу, получаем по формуле (1):

$$\frac{CL}{TG} = \frac{2}{255} \qquad (4)$$

но отрезки TG и QM отличаются на малые величины высших порядков, и поэтому (4) не противоречит (3).

Теперь основная задача — определить отношение ML/MK, т. е. выразить силу притяжения в точке M через силу тяжести. Из треугольника MLK, в котором внешний угол при K есть географическая широта φ, имеем, отбрасывая $\overline{LK}^2$,

$$\frac{ML^2}{MK^2} = 1 + 2\frac{LK}{MK}\cos\varphi = 1 + 2\frac{LK}{QM}\frac{QM}{MK}\cos\varphi = 1 + 2\cdot\frac{1}{288}\cos^2\varphi$$

так что

$$\frac{ML}{MK} = 1 + \frac{1}{288}\cos^2\varphi.$$

Но из наблюдений, как говорит Клеро, получено, что сила тяжести в M есть

$$p_0\left(1 - \frac{10}{2025}\cos^2\varphi\right)$$

где p_0 — сила тяжести на полюсе; поэтому сила притяжения в M равна

$$p_0\left(1-\frac{10}{2025}\cos^2\varphi\right)\left(1+\frac{1}{288}\cos^2\varphi\right)=p_0\left(1-\frac{1}{682}\cos^2\varphi\right)$$

Считая сжатие бесконечно малым, Клеро подставляет в это выражение геоцентрическую широту и полагает приближенно

$$\cos\varphi=\frac{x}{b}=\frac{QM}{PC},$$

это и дает его формулу на стр. 98.

Е. ПРИМЕЧАНИЯ К ЧАСТИ ВТОРОЙ

36 (стр. 106). От общих соображений о возможности существования жидких вращающихся планет при действии сил притяжения, выражаемых различными гипотетическими законами, Клеро переходит во второй части к планетам, все частицы которых гравитируют по закону всемирного тяготения. О трудностях этой проблемы он говорил уже в § 12 первой части, а в § 70 отметил еще осложнения, неизбежные в теории неоднородных жидких планет. В I главе второй части Клеро развивает теорию равновесия однородных эллипсоидов вращения, для которых первое доказательство возможности существования было дано Маклореном. Во II и в следующих главах Клеро излагает теорию равновесия неоднородных сфероидов, весьма близких к сфере, ограничиваясь случаем „медленного вращения“, когда отношение центробежной силы к силе тяжести настолько мало́, что его квадратом, так же как и квадратом сжатия, можно пренебречь. Это и представляет собою так называемое „приближение Клеро“, которое он сумел исчерпать до конца в главах II—IV второй части его книги. Здесь он установил прежде всего тот замечательный результат, что в этом приближении неоднородные фигуры равновесия могут представлять собой эллипсоиды вращения. Во Введении ко второй части Клеро говорит, что одной из главных побудительных причин предпринятого им исследования было стремление доказать или опровергнуть одно утверждение Ньютона; к этому же вопросу он возвращается в §§ 35 и 51 второй части; но, как мы уже упоминали в нашей статье, Ньютон сам устранил в 3-м издании своих „Начал“ (1725 г.) то место, которое вызывало изумление Клеро; мы имеем здесь пример как бы некоторого недоразумения, давшего, однако, столь мощный толчок развитию науки.

В тексте нашего перевода, согласно указанию Комиссии по истории физико-математических наук, сохранены все важнейшие обозначения Клеро, хотя бы и вовсе не применяемые в современных изложениях. Мы разрешили себе только два отступления:

Обозначение c (circonférence) заменено на неизбежное теперь 2π; вместо At, как у Клеро и Даламбера, мы пишем, для наглядности формул, современное arctg.

Приводим здесь же сводку основных обозначений, которые применяются в Комментарии:

1) плотность . . . . ρ (у Клеро R)
2) сжатие слоев . . . . α („ „ ρ)
3) синус геоцентрической широты . . . $\sin\theta$ („ „ s)

Остальные обозначения пояснены в отдельных пунктах Комментария.

37 (стр. 108). К § 4. Это предложение было установлено Маклореном в его „Treatise of Fluxions“ (1742, § 628); оно является прямым следствием „Теоремы 24“ в „Началах“ Ньютона (перевод академика А. Н. Крылова, стр. 267).

Теорема, которую Клеро приводит без доказательства в § 4, непосредственно связана с теоремой, имеющейся у него несколько дальше, в § 10 доказательство их не представляет труда.

Пусть X (фиг. 41) — основание пирамиды, h — ее высота. Площадь сечения на высоте z над основанием равна:

$$\frac{(h-z)^2}{h^2}X,$$

поэтому притяжение элемента объема пирамиды на точку A, находящуюся от него на расстоянии $(h-z)$, есть

$$\frac{(h-z)^2}{h^2}\frac{X}{(h-z)^2}dz$$

интеграл от этого выражения от $z=0$ до $z=h$ дает X/h; вместо этого, предполагая X бесконечно малым, Клеро пишет в § 10 X/AD, где AD — ребро пирамиды. Если же взять две пирамиды, у которых отношение подобия сторон равно k, то отношение их притяжений на вершины B и b (фиг. 36) будет:

$$\frac{k^2X}{kh}:\frac{X}{h}=k=\frac{BT}{bt},$$

как и дано в § 4.

38 (стр. 113). К § 9. По поводу вывода уравнения равновесия однородных эллипсоидов (так называемых эллипсоидов Маклорена) нужно сделать несколько замечаний: прежде всего, самая теорема § 9 формулирована так, как будто никаких других фигур равновесия, кроме эллипсоидов вращения, однородная вращающаяся жидкость принять не может. Такое утверждение просто неверно и противоречит указанию, сделанному самим Клеро в § 53

первой части, где установлена возможность фигур равновесия, не обладающих симметрией тел вращения (такие фигуры и были раскрыты позднее Якоби); затем, вывод основного уравнения, который Клеро подготовляет в §§ 6, 7 и 8, довольно сложен, тогда как он мог бы получить его в нескольких строках, если бы воспользовался той теоремой Ньютона, на которую мы уже ссылались в прим. 3 и которую сам он применяет несколько ниже (в § 18). Действительно, если ось Y есть ось вращения эллипсоида, $-\lambda x$ и $-\mu y$ проекции силы притяжения на точку $M(x, y)$ на его поверхности, то „элементарное усилие" есть

$$dp = -\lambda x\, dx - \mu y\, dy + \omega^2 x\, dx,$$

и принцип Гюйгенса приводит к уравнению внешней поверхности

$$\lambda x^2 + \mu y^2 - \omega^2 x^2 = \text{const}.$$

Если это уравнение должно совпадать с уравнением эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

то

$$a^2(\lambda - \omega^2) = b^2 \mu.$$

Отсюда, как в прим. 3, получается заключительное уравнение § 9:

$$Pb = (E - F)\, a$$

Заметим еще, что в предпоследней пропорции § 9 Клеро пользуется равенством

$$QG = \frac{CE^2}{CP^2} CQ$$

оно получается из уравнения нормали к эллипсу в точке $M(x, y)$ (в форме, уже написанной в прим. 35); из него находим (фиг. 40)

$$CG = CQ\frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$QG = CG + CQ = CQ\frac{a^2}{b^2} = CQ\frac{CE^2}{CP^2}$$

39 (стр. 115). К § 11. Пусть $\angle MPQ = \beta$; тогда

$$\frac{MR}{PM} = -d\beta = \frac{d\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}}$$

Далее, уравнение меридианного эллипса в обозначениях Клеро (где большая полуось равна m, малая равна 1) имеет вид

$$\frac{u^2}{m^2} + (z-1)^2 = 1$$

или

$$u^2 = 2m^2 z - m^2 z^2$$

как в тексте.

40 (стр. 117). К § 12. Таким образом, величина, которая здесь появляется, есть второе сжатие эллипсоида

$$\delta = \frac{a-b}{b} = m - 1 \simeq \frac{e^2}{2}$$

если

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

41 (стр. 119). К § 14. Положим $\angle NEK = \gamma$; тогда [фиг. 43]:

$$\frac{LN}{EN} = d\gamma = \frac{d \sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

Уравнение меридианного эллипса для фиг. 43

$$\frac{(z-m)^2}{m^2} + u^2 = 1 .$$

42 (стр. 120). К § 11 и 14. Выражения для сил притяжения однородного эллипсоида вращения на единицу массы, помещенную на его полюсе или на экваторе, именно выражения P и E, данные в конце § 11 и § 14, могут считаться классическими в теории фигур равновесия. Отметим прежде всего, что они зависят только от одного параметра, именно от второго эксцентриситета эллипсоида, который здесь обозначен через l и определяется равенством:

$$l^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = m^2 - 1$$

(напоминаем, что у Клеро большая полуось есть m, а полярная полуось принимается за 1). Таким образом, выражения P и E зависят только от отношения полуосей эллипсоида; они тесно связаны с параметрами λ и μ, которые уже были введены в прим. 3 и 38; но через эти же параметры выражается потенциал силы тяжести на внутренние точки эллипсоида и на точки на его поверхности. Действительно, как было показано в этих примечаниях, выражение

$$-\frac{1}{2}(\lambda x^2 + \mu y^2 - \omega^2 x^2)$$

остается постоянным на поверхности эллипсоида. В теории потенциала доказывается, что это выражение является потенциалом (или силовой функцией) действующих сил, т. е. притяжения и центробежной, на внутреннюю точку эллипсоида, с координатами x и y; об значая этот потенциал через U, имеем, следовательно:

$$U = -\frac{1}{2}(\lambda x^2 + \mu y^2 - \omega^2 x^2)$$

Частные производные от U по x и y дают проекции сил на оси; обозначая эти проекции через Φ_x и Φ_y, имеем:

$$\Phi_x = x(\omega^2 - \lambda), \quad \Phi_y = -\mu y$$

Следовательно. на полюсе ($y = 1$, $x = 0$)

$$\Phi_y = -\mu$$

и на экваторе ($y = 0$, $x = m$)

$$\Phi_x = m(\omega^2 - \lambda)$$

Величина сил притяжения обозначается у Клеро через P и E; поэтому (см. стр. 116 и 120):

$$\mu = P = \frac{4\pi(1 + l^2)}{l^3}(l - \operatorname{arc\,tg} l)$$

$$\lambda = \frac{E}{\sqrt{1 + l^2}} = \frac{2\pi}{l^3}[(1 + l^2)\operatorname{arc\,tg} l - l]. \qquad \text{(I)}$$

Но уравнение равновесия (см. прим. 38), именно

$$a^2(\lambda - \omega^2) = b^2 \mu$$

в обозначениях Клеро имеет вид

$$\lambda - \frac{\mu}{1 + l^2} = \omega^2$$

так как у него:

$$a^2 = m^2 = 1 + l^2; \quad b^2 = 1.$$

Подставляя сюда полученные выражения λ и μ, переходим к уравнению

$$\frac{(3 + l^2)\operatorname{arc\,tg} l - 3l}{l^3} = \frac{\omega^2}{2\pi f\rho} \qquad \text{(II)}$$

Здесь в правую часть введено в знаменатель произведение $f\rho$ (где f — постоянная всемирного тяготения, ρ — плотность эллипсоида), так как оно

входит множителем в выражения λ и μ; у Клеро оно принимается за единицу.

Уравнение (II) есть знаменитое уравнение равновесия „эллипсоидов Маклорена"; однако ни у самого Маклорена, ни у Клеро мы его не находим; оно встречается впервые в одном замечательном мемуаре Даламбера („О фигуре Земли", 1773); ввиду исключительного интереса этого мемуара мы даем полный перевод его в Приложении II (стр. 201—216).

В современной теории выражения для λ и μ получается из общего выражения потенциала притяжения однородного эллипсоида на внутреннюю точку (см. Аппелль, ук. соч., стр. 48—50).

43 (стр. 122). К § 17. Таким образом, отбрасывая квадрат и высшие степени параметра φ, возвращаемся к формуле Ньютона для сжатия однородного сфероида (прим. 3).

44 (стр. 123). К § 18. Эта теорема применяется в „Началах" Ньютона при определении веса тел в различных областях Земли (Предложение 20 книги III, перев. А. Н. Крылова, стр. 537). Так как в однородном сфероиде не только сила притяжения, но и сила веса, в проекции их на радиус-вектор MC (фиг. 44), изменяется пропорционально расстоянию точки от центра, то легко вывести, что работа силы тяжести или „полный вес" любого столба по радиусу CM равны $\frac{1}{2} G_r . \overline{CM}$, где G_r есть проекция силы тяжести в точке M на радиус CM. Но для равновесия планеты во всех точках поверхности должно выполняться условие

$$\frac{1}{2} G_r \cdot CM = p_0 = \text{const}$$

Отсюда и следует утверждение Клеро: в любой точке M на поверхности однородной жидкой планеты проекции силы тяжести на радиус CM обратно пропорциональна длине этого радиуса.

Если обозначим через G силу тяжести в M, через α угол MCO и через k^2 постоянную, то

$$G_r = G \sin \alpha = \frac{k^2}{MC} = \frac{k^2}{MO} \sin \alpha$$

т. е.

$$G = \frac{k^2}{MO}$$

как и сказано у Клеро. Но так как CN по построению параллелен касательной к эллипсу в точке M, то CN есть полудиаметр, сопряженный с MC; таким образом, по теореме Аполония

$$MC \cdot CN \cdot \sin \alpha = MO \cdot CN = PC \cdot CE = \text{const}$$

Следовательно, сила тяжести G в точке M прямо пропорциональна CN; далее, из уравнения эллипса PEp (фиг. 44), полагая $x = KM$, $y = KC$, легко находим:

$$\overline{MZ}^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4} \tag{1}$$

$$\overline{NC}^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^2 b^2} \tag{2}$$

Формула (2) вытекает и из второй теоремы Аппполония

$$\overline{NC}^2 + \overline{NM}^2 = a^2 + b^2$$

Таким образом:

$$NC = \frac{a}{b} MZ,$$

и потому сила тяжести G прямо пропорциональна длине нормали MZ.

45 (стр. 123). К § 19. Для вычисления MZ у эллипсоида со слабым сжатием δ, положим в формуле (1), прим. 44, $b = a(1 - \delta)$: отбрасывая δ^2, найдем:

$$\overline{MZ}^2 = y^2 + (1 - 4\delta) x^2$$

Пусть $\varphi = MCE$ (геоцентрическая широта), $MC = r$

$$x = KM = r \cos\varphi; \quad y = KC = r \sin\varphi$$

тогда

$$MZ^2 = r^2 (1 - 4\delta \cos^2\varphi)$$

и отсюда

$$MZ = r(1 - 2\delta + 2\delta \sin^2\varphi)$$

Но для эллипса со слабым сжатием

$$r = a(1 - \delta \sin^2\varphi)$$

поэтому

$$MZ = a(1 - 2\delta + \delta \sin^2\varphi)$$

На экваторе ($\varphi = 0$) это дает формально

$$(MZ)_0 = a(1 - 2\delta)$$

отношение обоих выражений есть

$$1 + \delta \sin^2\varphi$$

откуда и следует формула текста. Если вместо „силы“ тяжести мы введем в эту формулу ускорение силы тяжести и обозначим через g_0 и g^1

его значения на экваторе и под широтой φ, то для однородной планеты получим:

$$g = g_0 (1 + \delta \sin^2 \varphi) \qquad (1)$$

Этот закон изменения ускорения силы тяжести на однородной Земле был дан еще Ньютоном (перевод „Начал", стр. 537). Но, как мы увидим ниже, Клеро показал, что и для неоднородной планеты изменение силы тяжести подчиняется закону той же самой формы (см. § 48 и прим. 65); мы имеем здесь:

$$g = g_0 (1 + \beta \sin^2 \varphi) \qquad (2)$$

где β есть тот „коэффициент Клеро", о котором уже шла речь в прим. 4. Сопоставление формул (1) и (2) снова обнаруживает, что для однородной планеты коэффициент Клеро β равен ее сжатию δ, и поэтому, в силу теоремы Ньютона, он равен $\frac{5}{4}\varphi$.

46 (стр. 126). К § 20. Клеро вычисляет здесь, во втором приближении, значение параметра φ для Земли, принимая ее за сфероид со сжатием $\delta = 1/230$. Он начинает с определения длины дуги градуса экватора. Соответственную формулу можно найти в любом изложении геодезии.* Пусть s есть малая дуга меридиана, измеренная под широтой φ и соответствующая небольшой разности широт $\Delta\varphi$ (порядка 1—2°). Тогда

$$s = \frac{(1 - e^2) D_0}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \Delta\varphi$$

где D_0 — искомая длина градуса экватора, e^2 — первый эксцентриситет меридиана, т. е. $a^2 e^2 = a^2 - b^2$. В случае малого эксцентриситета можно положить

$$a = 1 + \delta, \quad e^2 = 2\delta,$$

отсюда, обозначая через D измеренную под широтой φ дугу меридиана, соответствующую разности широт $\Delta\varphi = 1^\circ$, и отбрасывая величины порядка δ^2, получаем приближенно:

$$D_0 = D (1 - 3\delta \sin^2 \varphi + 2\delta)$$

это и есть формула, которой пользуется Клеро; подставляя в нее значение D, измеренное в Лапландии при $\varphi = 66^\circ 20'$, и принимая для δ указанное выше значение, Клеро получает:

$$D_0 = 57\,309 \text{ туаз} = 111.698 \text{ км}$$

---

* См., например, вывод ее у Гаусса. Лекции по теоретической астрономии. Перевод. академика А. Н. Крылова (в т. VI собрания его трудов, стр. 386).

Заметим, что в современной геодезии для так называемого „международного эллипсоида“ (1924) $D_0 = 111.324$ км; значительное расхождение получается за счет ошибки в измерении Лапландской дуги, достигавшей как мы уже упоминали, 430 м, и неправильной величины сжатия, действительная величина которого есть $\delta = {}^1/_{296}$ (так как первое сжатие $\alpha = {}^1/_{297}$).

Для того чтобы пояснить дальнейшие вычисления Клеро, нужно напомнить старинный термин: синус-верзус дуги; по определению:

$$\sin \operatorname{vers} \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

отсюда для малой дуги линейной длины s на окружности радиуса a получим, выражая синус-верзус в линейной мере:

$$\sin \operatorname{vers} s = \frac{s^2}{2a}$$

Если дуга s_0 получается как результат вращения точки на окружности, у которой линейная длина градуса есть D_0, причем вращение с угловой скоростью ω продолжается 1 сек., то

$$\sin \operatorname{vers} s_0 = \frac{D_0\, \omega^2}{2 \sin 1^\circ}$$

Полагая здесь $D_0 = 57\,309$ туазам, $\omega = \dfrac{2\pi}{86\,164}$ и помня, что 1 туаз = = 864 линиям, получаем:

$$\sin \operatorname{vers} s_0 = 7.54287 \text{ линий}$$

в точности, как у Клеро.

Высота падения в первую секунду на экваторе есть

$$\varepsilon_0 = \frac{g_0}{2} \text{ линий}$$

где g_0 — ускорение силы тяжести на экваторе; поэтому отношение центробежной силы на экваторе (т. е. $\omega^2 a$) к силе тяжести g_0 есть

$$\varphi = \frac{D_0\, \omega^2}{g_0 \sin 1^\circ}$$

или

$$\varphi = \frac{\sin \operatorname{vers} s_0}{\varepsilon_0}$$

Подстановка в знаменатель $\varepsilon = 2168.75$ линии дает

$$\varphi = \frac{7.54287}{2168.75} = \frac{1}{287.52}$$

Это значение и приводится у Клеро. Заметим, что в современной теории фигуры Земли принимают

$$\varphi = \frac{1}{288.37} = 0.00\,34678$$

47 (стр. 127). К § 22. Данные, относящиеся к спутникам Юпитера, взяты у Ньютона („Начала", перев. академика А. Н. Крылова, стр. 505 и 507); сжатие этой планеты получается, по Клеро:

$$\delta = \frac{5}{4}\left(\frac{24\,032}{596}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{26.63}\right)^3 = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{11.615} = \frac{1}{9.292}$$

отсюда отношение большой оси к малой:

$$\frac{a}{b} = 1 + \delta = 1.1076$$

вместо чего Клеро пишет

$$1 + \delta = \frac{100.5}{90.5} = 1.110$$

Такая же величина сжатия Юпитера, считая его однородным, была дана и Ньютоном („Начала", стр. 536), где мы находим значение:

$$\delta = \frac{1}{9.33}$$

Однако наблюденное сжатие Юпитера значительно меньше этой величины; уже во времена Ньютона было известно определение Поунда ($\delta = 1/15$), почти совпадающее с современным ($\delta = 1/15.4$). Лаплас, в III книге „Небесной механики" (гл. V), сохраняя гипотезу однородности, приходит к значению $\delta = 0.10967$, почти тождественному с результатом Клеро. К вопросу о сжатии Юпитера, имеющему весьма важное значение для теории фигуры планет, Клеро возвращается еще дважды в §§ 35 и 70 (см. ниже, стр. 309, 345).

48 (стр. 130). К § 24. Вывод этой леммы у Клеро весьма краток; поэтому приведем здесь несколько более подробное доказательство, имеющееся в Комментарии, составленном маркизой Эмилией дю-Шатлэ к ее переводу ньютоновых „Начал" (Marquise Émilie du Chatelet. Éléments Mathématiques de la Philosophie Naturelle (1759), vol. II, p. 229—230). (Об этом Комментарии см. выше, стр. 223—224).

„Проведем прямую IHi перпендикулярно к Rr и перенесем сегмент IRi в положение iZI; тогда очевидно, что площадь луночки $iZIr$ будет единственной частью круга $RIri$, которая притягивает частицу M в направлении Rr, так как притяжения сегментов IRi, iZI взаимно уничтожаются.

„Предположим, что площадь $IriZ$ разбита на бесконечное множество элементов линиями QTS, qts, перпендикулярными к Ii; тогда очевидно, что абсолютное притяжение каждого элемента $TtSs$ на M будет равно площади этого элемента, деленной на квадрат расстояния TM; следовательно, эта сила есть:

$$\frac{TtSs}{TM^2}\ ,$$

но от нее нужно найти составляющую по направлению HY или по параллельному к нему направлению QT; при таком разложении сила уменьшится в отношении $QT:MT$; следовательно,

$$\frac{TtSs}{TM^3}\cdot QT$$

есть составляющая притяжения элемента $TtSs$ по направлению HY.

„Однако площадь $TtSs = TS \cdot Qq$, и по построению

$$TS = 2HY,$$

поэтому притяжение элемента $TtSs$ есть

$$\frac{2HY\cdot Qq\cdot QT}{MT^3}$$

или, пренебрегая бесконечно малыми второго порядка,

$$\frac{2HY\cdot Qq\cdot QT}{MR^3}$$

„Для того чтобы взять интеграл от этого выражения, в котором HY и MR постоянные, я замечаю, что $Qq\cdot QT$ есть дифференциал сегмента $HQTZ$; следовательно, притяжение площади $TZrs$ на M в направлении HY равно

$$\frac{2HY}{MR^3}\cdot HQTZ\ .$$

„Если заменим здесь HQ на Hi, то получим

$$\frac{2HY}{MR^3}\cdot HiTZ$$

это будет притяжение площади $iTZrS$; удвоенная его величина, т. е.

$$\frac{4HY}{MR^3} \cdot HiTZ$$

даст притяжение луночки $IZiSr$ или, что то же самое, притяжение всего круга.

„Если будем рассматривать здесь площадь $iHZI$ как полукруг, радиус которого равен RH, что может внести только бесконечно малую погрешность второго порядка, то предыдущее выражение превратится в

$$\pi \cdot HY \cdot \frac{RH^2}{MR^3}$$

что и требовалось доказать".

Приведем теперь аналитическое доказательство этой теоремы; примем за 1 и плотность диска и его толщину; направим на фиг. 45 ось X справа налево, от Z к R; центр окружности Y примем за начало координат положим $YH = h$; $MH = k$; радиус $YR = a$. Притяжение элемента объема диска при точке (x, y) на M будет

$$\frac{dx\,dy}{\rho^2}$$

где

$$\rho^2 = (x - h)^2 + y^2 + k^2$$

Проектируя эту силу на положительное направление оси X и интегрируя по всей поверхности основной окружности, получим

$$F_x = \int\int \frac{(x-h)\,dx\,dy}{\rho^3}$$

Теперь интегрируем сначала по x, между пределами $-\xi$ в точке S и $+\xi$ в точке ей симметричной; получим

$$F_x = \int \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) dy$$

где

$$\rho_1^2 = (\xi + h)^2 + y^2 + k^2$$

$$\rho_2^2 = (\xi - h)^2 + y^2 + k^2$$

Если квадратом h можно пренебречь, найдем, учитывая, что $\xi^2 + y^2 = a^2$,

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + k^2}} - \frac{\xi h}{(a^2 + k^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + k^2}} + \frac{\xi h}{(a^2 + k^2)^{3/2}}$$

Поэтому

$$F_x = -\frac{2h}{(a^2+k^2)^{3/2}} \int \xi \, dy$$

Но площадь окружности RIr есть

$$2\int \xi \, dy = \pi a^2$$

наконец, $a^2 + k^2 = MR^2$, поэтому проекция притяжения в направлении HY равна

$$F_x = \pi \cdot HY \cdot \frac{\overline{RH}^2}{\overline{MR}^3}.$$

как и дано у Клеро.

49 (стр. 134). К § 26. Клеро переходит здесь к развитию формул для притяжения эллипсоида вращения на внешнюю точку; эту задачу он решает как бы в несколько приемов; в настоящем параграфе идет речь только о составляющей притяжения, перпендикулярной к радиусу-вектору, проведенному от центра эллипсоида к внешней точке; так как сжатие эллипсоида предполагается бесконечно малым, то и составляющая, о которой идет речь, бесконечно мала (для сферы, однородной или концентрически однородной, она обращается в нуль); затем, в § 45 вычисляется притяжение эллипсоида на точку, лежащую на продолжении его полярной оси, когда трансверсальная составляющая, о которой только что была речь, обращается в нуль; в § 46 из полученной формулы легко получается радиальная составляющая притяжения эллипсоида вращения с бесконечно малым сжатием на любую точку его поверхности; наконец, в § 55 используются все эти результаты. Такое построение теории несколько вредит цельности ее изложения и требует постоянных ссылок на теоремы и формулы, оставленные далеко позади. Но мы можем, разумеется, рассматривать их здесь только в той последовательности, в какой они даны у Клеро; заметим лишь, что задача вычисления притяжения эллипсоида на в н е ш н ю ю точку представила значительно бо́льшие трудности, чем аналогичная задача о притяжении на в н у т р е н н ю ю точку; первые важные результаты, не ограниченные никакими предположениями о малости сжатия эллипсоида, получил Маклорен (1742); у него же впервые, как метод решения, вводятся софокусные эллипсоиды; этот прием оказался чрезвычайно плодотворным для общего решения задачи; однако оно было получено во всей полноте лишь значительно позднее, после работ Айвори (Ivory, 1809), Лапласа (1782), Гаусса (1838) и Дирихлэ (1839).*

---

* Сборник мемуаров этих авторов о притяжении эллипсоидов имеется в издании Ostwalds Klassiker, № 19; Über die Anziehung homogener Ellipsoide (Abhandlungen von Laplace, Ivory, Gauss, Chasles und Dirichlet).

Клеро, как он сам это подчеркивает во Введении к главе II второй части, этой проблемы во всей ее общности не решал и ограничился лишь случаем, когда сжатие эллипсоида бесконечно мало, так что с ним можно „обращаться как с дифференциалами“. С этой именно степенью точности он дает в настоящем § 26 выражение для составляющей притяжений однородного эллипсоида вращения на направление CX (фиг. 46), т. е. на направление перпендикуляра к радиусу-вектору внешней точки M; через X обозначается точка пересечения этого перпендикуляра с нормалью к эллипсоиду в точке M.

Окончательная формула в § 26 для трансверсальной составляющей (которую мы обозначим через F_x), принимая еще плотность эллипсоида равной 1, имеет вид:

$$F_x = \frac{4\pi}{5}\,\overline{CX}\left(\frac{r}{e}\right)^5$$

здесь $e = CM$ (расстояние внешней точки от центра эллипсоида), $r = CN$ (часть радиуса CM, отсекаемая поверхностью эллипсоида); CX — величина малая, порядка сжатия, в случае сферы равная нулю.

Для вывода этого замечательного выражения Клеро пользуется теоремой, данной им в § 24 о проекции на плоскость однородного диска силы, с которой этот диск притягивает внешнюю точку M, именно (фиг. 45)

$$|F_x| = \pi \cdot HY \cdot \frac{\overline{RH}^2}{\overline{MR}^3}. \tag{1}$$

Теперь весь сфероид разбивается на такие диски $Rr\mathrm{P}\rho$; плоскости их перпендикулярны радиусу CM, а центры Y лежат на прямой μC, которая является (фиг. 46) диаметром, сопряженным с хордами Rr, $\mathrm{P}\rho$ и т. д.; притяжение этих элементарных дисков надо проинтегрировать, взяв за дифференциал переменной бесконечно малую толщину дисков, изображаемую на фиг. 46 отрезками Hh; мы положим $Hh = dz$, обозначая через z переменное расстояние диска от центра, $z = HC$, причем точка H лежит на пересечении хорды Rr с нормалью к эллипсоиду MX.

Положив еще, как в прим. 48, $HY = h$ и обозначив через β бесконечно малый угол $MC\mu$, имеем

$$h = z\,\mathrm{tg}\beta;$$

подставляя это выражение в (1), обнаруживаем, что множитель $\overline{RH}^2/\overline{MR}^3$ можно вычислять, отбрасывая все бесконечно малые величины, так как $\mathrm{tg}\,\beta$ есть уже величина первого порядка малости; поэтому в этом вычислении можно считать все сечения эллипсоида окружностями и принять также за окружность меридианное сечение эллипсоида $KLkl$. Но в таком случае имеем:

площадь диска

$$\pi \overline{RH}^2 = \pi\,[\overline{CN}^2 - \overline{CH}^2] = \pi\,(r^2 - z^2)$$

расстояние $\overline{MR} = (\overline{MH}^2 + \overline{RH}^2)^{1/2} = [(e-z)^2 + (r^2 - z^2)]^{1/2} =$

$$= (e^2 + r^2 - 2ez)^{1/2}$$

Поэтому формула (1) дает для проекции притяжения каждого диска с толщиной dz выражение:

$$\frac{\pi\, z\, \mathrm{tg}\,\beta\,(r^2 - z^2)\, dz}{(e^2 + r^2 - 2ez)^{3/2}}$$

Проекция полного притяжения сфероида на точку M получается в виде интеграла от этого выражения, в пределах от $-CN$ до $+CN$, т. е. от $z = -r$ до $z = +r$, так что

$$F_x = \pi\,\mathrm{tg}\,\beta \int\limits_{-r}^{+r} \frac{(r^2 - z^2)\, dz}{(e^2 + r^2 - 2ez)^{3/2}}$$

квадратуру можно выполнять, применяя подстановки:

$$e^2 + z^2 - 2ez = t^2; \qquad e - r = \alpha; \qquad e + r = \beta$$

она приводит — после некоторых вычислений — к результату:

$$F_x = \frac{4\pi}{5}\,\mathrm{tg}\,\beta\,\frac{r^5}{e^4} \qquad (2)$$

Но угол β, равный $MC\mu$, в точности равен углу, который диаметр $C\mu$ образует в точке μ с нормалью к эллипсоиду в этой точке (она не показана на фиг. 46); происходит это потому, что нормаль в точке μ параллельна диаметру MC, так как обе эти прямые перпендикулярны хордам Rr и параллельной им касательной в точке μ. Но угол при точке μ бесконечно мало отличается от угла CMX; поэтому здесь имеет место приближенное равенство

$$\angle MC\mu \simeq \angle GMX$$

Следовательно,

$$\mathrm{tg}\,\beta \simeq \frac{\overline{CX}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{CX}}{e}$$

и формула (2) принимает вид

$$F_x = \frac{4\pi}{5}\,\overline{CX}\left(\frac{r}{e}\right)^5$$

как ее и дает Клеро.

Вывод формулы (2), имеющийся в тексте Клеро и в Комментарии дю-Шатлэ, по существу не отличается от вышеприведенного. Но в нем исходным положением является приближенное равенство углов $MC\mu$ и CMX; за независимую переменную принимается отрезок $RG = u$ и величина его определяется приближенным равенством:

$$\overline{RG}^2 = \overline{CN}^2 - \overline{CG}^2$$

затем из приближенных соотношений подобия

$$\frac{RH}{MR} = \frac{SI}{MS} = \frac{CG}{MC}$$

выводится (учитывая еще, что $RS = 2u$) равенство:

$$SI - RH = \frac{2u}{e} \sqrt{r^2 - u^2}$$

и из него

$$d(SI - RH) = \frac{2}{e} \left(\sqrt{r^2 - u^2} - \frac{u^2}{\sqrt{r^2 - u^2}} \right) du$$

Это дает возможность привести дифференциал притяжения к рациональной форме:

$$2\pi \frac{\overline{CX}}{e^5} (r^4 - 3r^2 u^2 + 2u^4)\ du$$

интеграл от него, взятый в пределах $u = 0$ до $u = r$, и дает окончательную формулу.

50 (стр. 134). К § 27. Прием, который поясняется в этом параграфе, составляет как бы самый нерв метода, применяемого Клеро в его приближенной теории фигур равновесия. Не владея еще понятием силовой функции и не имея возможности получать проекции силы на любое направление при помощи дифференцирования силовой функции по этому направлению, Клеро принужден вычислять составляющие сил притяжения непосредственно; для этого он берет всегда два основных направления: именно радиус CM, соединяющий внешнюю точку M с центром фигуры, и перпендикуляр к нему CX (фиг. 47). Первая из этих составляющих — конечная, вторая — бесконечно малая, порядка сжатия. Из § 26 известно, что эта составляющая пропорциональна бесконечно малому отрезку CX, причем точка X лежит на нормали к сфероиду в M. Затем Клеро замечает, что если вместо силы F_x, действующей по CX и равной

$$F_x = \frac{4\pi}{5} \overline{CX} \cdot \left(\frac{r}{e}\right)^5$$

взять силу

$$F' = \frac{4\pi}{5}\,\overline{CV} \cdot \left(\frac{r}{e}\right)^5$$

и предположить, что она действует по CV, т. е. по большой оси меридианного эллипса, то ее проекция на направление CX получится простой заменой CV на CX; это допустимо, так как в треугольнике VCX угол X равен $\frac{\pi}{2} - \angle CMX$, а этот последний — малая величина порядка сжатия; поэтому треугольник VCX можно считать прямоугольным: тогда CX будет проекцией CV на направление, перпендикулярное к радиусу CM так, что F_x есть проекция F' на CX; проекции же F' на CM Клеро никогда не учитывает, потому что она бесконечно мала по сравнению с силой, действующей по CM.

Если теперь мы предположим еще, что овал $KLkl$ есть эллипс со сжатием δ, то для CV имеется уже готовое выражение, именно (см. стр. 285):

$$CV = 2q\delta$$

где

$$q = MQ$$

Таким образом, приходим к следующей теореме:

Пусть даны однородный эллипсоид, сжатие которого есть величина, квадратом которой пренебрегаем, и внешняя частица M, массу которой полагаем равной 1. Проекция притяжения эллипсоида на эту частицу, взятая по направлению большой оси эллипсоида, определяется выражением

$$F = \frac{8\pi\rho}{5e^5}\, q\,(r^5\,\delta) \tag{3}$$

где ρ — плотность эллипсоида, δ — его сжатие, e — расстояние CM внешней точки до центра, $q = QM$ — „ордината" точки M, считаемая здесь параллельно большой оси эллипсоида, $r = CN$, т. е. это та часть радиуса CM, которая находится внутри эллипсоида.

Перейдем теперь к неоднородному эллипсоиду. Допустим для этого, что притяжение некоторой однородной фигуры, по форме близкой к сфере, с плотностью ρ и средним радиусом r на какую-либо точку M определяется выражением вида

$$F = A\rho\, f(r),$$

где A — постоянная.

Рассмотрим бесконечно тонкий слой внутри этой фигуры и обозначим его внутренний и внешний радиусы через r и $r + dr$.

Притяжение этого слоя на точку M мы найдем как разность притяжений однородной массы, ограниченной внешним радиусом $(r+dr)$ и внутренним (r); очевидно, это элементарное притяжение dF будет:

$$dF = A\rho\left[f(r) + \frac{\partial f}{\partial r}\,dr\right] - A\rho\, f(r)$$

$$= A\rho\,\frac{\partial f}{\partial r}\,dr = A\rho\, df(r);$$

следовательно, притяжение всей неоднородной фигуры на точку M будет найдено интегрированием предыдущего дифференциала по всему объему массы, от 0 до предельного значения r, считая уже теперь плотность ρ функцией r.

Таким образом, получим:

$$F = A\int_0^r \rho\, df(r) \qquad (4)$$

Формула (4) применяется несколько раз в книге Клеро; повидимому, она ему и принадлежит. Так, например, для выражения (3), она дает

$$F = \frac{8\pi}{5e^5}\, q \int_0^r \rho\, d\left(r^5\,\delta\right) \qquad (5)$$

где $r = CN$ — средний радиус сфероида $KL\,kl$ (фиг. 46).

Так как Клеро нигде не вводит гравитационной постоянной, то размерность всех сил притяжения, как это усматривается и из формулы (5), есть у него плотность, умноженная на длину.

51 (стр. 139). К § 29. Здесь рассматривается следующая задача: твердый сфероид, состоящий из слоев переменной плотности, окружен однородной жидкой оболочкой. Может ли эта оболочка, вращаясь вместе с ядром, как твердое тело, с одной и той же угловой скоростью и вокруг той же оси, принять форму равновесия, которая была бы эллипсоидом вращения со слабым сжатием? Если относительное равновесие жидкой массы возможно, как найти сжатие ее внешней поверхности? Метод, которым пользуется Клеро для решения этой задачи, — оставаясь в пределах точности, которой он себя ограничил, — изумительно прост. Рассмотрим точку M на поверхности жидкой массы. Так как жидкость однородная, то для равновесия необходимо и достаточно, чтобы вектор силы тяжести был направлен по нормали к внешней поверхности; на фиг. 47 это направление есть MX; разложим силу тяжести, действующую по MX, на две

составляющие, именно одну, конечную, направленную по MC, и другую, бесконечно малую, действующую по CV; для того чтобы силовой треугольник сомкнулся, необходимо, чтобы эти составляющие относились друг к другу как MC: CV. Определим эти составляющие. Бесконечно малая состоит из двух частей: именно из проекции силы притяжения на направление CV и из центробежной силы, действующей параллельно CV; обозначим эти составляющие через F_1 и F_2; конечную составляющую, направленную по CM, обозначим через F; тогда основное уравнение равновесия примет вид:

$$\frac{F_1 + F_2}{F} = \frac{CV}{CM} \tag{1}$$

Для вычисления этого отношения с точностью до первой степени сжатия включительно можно отбросить в знаменателе, в выражении F, все величины порядка сжатия и потому находить притяжение на точку M сферического тела, средний радиус которого равен CM. Мы повторим здесь для ясности это вычисление Клеро, при несколько бо́льшей общности обозначений. Пусть будет a и a_1 — средний радиус ядра и жидкости ($a = CO$, $a_1 = CM$); ρ — переменная плотность слоев твердого ядра и α — их сжатие; ρ_1 — плотность жидкой части; δ и α_1 — сжатие эллипсоидов PME и BOF (фиг. 47), между которыми заключена жидкая масса. После этого вычисляем F_1 по формуле (3) прим. 50; здесь нужно положить $e = a_1$, так как точка M лежит на самой поверхности эллипсоида, и разбить интеграл на две части: одну от 0 до a, где плотность переменная, а другую от a до a_1, где плотность постоянная; это даст нам

$$F_1 = \frac{8\pi q}{5a_1^5}\left[D + \rho_1\left(a_1^5 \delta - a^5 \alpha\right)\right], \tag{2}$$

причем

$$D = \int_0^a \rho \quad (r^5 \alpha); \qquad q = QM.$$

Для вычисления центробежной силы, — которая, по предположению, бесконечно мала по сравнению с притяжением, — достаточно вычислить притяжение на точку M от сферического тела среднего радиуса a_1, т. е. применить формулу § 13, которая здесь дает

$$\frac{4\pi}{a_1^2}\int_0^{a_1} \rho r^2\, dr = \frac{4\pi}{a_1^2}\left[A + \frac{\rho_1}{3}\left(a_1^3 - a^3\right)\right]$$

где

$$A = \int_0^a \rho\, r^2\, dr$$

Для получения центробежной силы на экваторе это выражение умножается на φ; для перехода к центробежной силе в M его нужно дополнительно помножить на q/a_1; таким образом:

$$F_2 = \frac{4\pi q}{a_1^3}\, \varphi \left[A + \frac{\rho_1}{3} (a_1^3 - a^3) \right] \qquad (3)$$

Конечная сила, фигурирующая в знаменателе (1), есть просто притяжение сферы, так что

$$F = \frac{4\pi}{a_1^2} \left[A + \frac{\rho_1}{3} (a_1^3 - a^3) \right] \qquad (4)$$

подставляя эти три выражения в (1), мы должны учесть, что $CV = 2q\,\delta$, если только внешняя поверхность есть эллипсоид со сжатием δ (прим. 35), и что $CM = a_1$. Решая полученное после указанных подстановок уравнение в отношении сжатия δ, приходим к весьма важной формуле:

$$\delta = \frac{a_1^{-2}(6D - 6\rho_1 a^5 \alpha) + \varphi\,[15A + 5\rho_1 (a_1^3 - a^3)]}{30A + 4\rho_1 a_1^3 - 10\rho_1 a^3} \qquad (5)$$

где интегралы D и A имеют указанные выше значения.

В конце § 29 Клеро и дает эту формулу; но он полагает в своих вычислениях ρ_1 и a_1 равными 1, что лишает возможности проверить его формулу в отношении размерности; к тому же один из членов дан у него с опечаткой (в числителе поставлено — $5a$, вместо — $5a^3\varphi$).

Из (5) немедленно выводится еще одна формула, имеющая фундаментальное значение для теории Клеро. Допустим, что весь сфероид PME (фиг. 47) представляет собой одну неоднородную жидкую планету, у которой плотность слоев ρ и их сжатие α зависят только от их расстояния r от центра. Совершенно очевидно, что все предыдущие рассуждения об условиях равновесия останутся в силе, и мы перейдем от (5) к этому новому случаю, просто положив плотность ρ_1 слоя $PEBF$ равной нулю и распространив интегралы D и A до внешней границы жидкой массы, т. е. положив:

$$D = \int_0^{a_1} \rho\, d(r^5 \alpha)$$

$$A = \int_0^{a_1} \rho\, r^2\, dr$$

Мы найдем, таким образом:

$$\delta = \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{5a_1^2} \frac{\int_0^{a_1} \rho \, d(r^5 \alpha)}{\int_0^{a_1} \rho r^2 \, dr} \tag{6}$$

Клеро дает эту формулу несколько ниже, в § 37, выводя ее из других и, как кажется, менее простых и убедительных предпосылок; мы будем называть (6) формулой внешнего сжатия и отметим здесь только, что, по самым условиям ее вывода, она имеет место при всяком распределении плотностей внутри жидкой массы и является следствием одних лишь условий ее равновесия.

Знаменатель второго члена справа в (6) может быть преобразован, если ввести в формулы среднюю плотность планеты; действительно, пусть M, V и Δ обозначают соответственно ее массу, объем и среднюю плотность; вычисляя эти величины как для случая сферы [что здесь достаточно, так как числитель второго члена в (6) есть малая величина порядка сжатия], мы имеем:

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \int_0^{a_1} \rho r^2 \, dr \\ V &= \frac{4\pi}{3} a_1^3 \\ \Delta &= \frac{3}{a_1^3} \int_0^{a_1} \rho r^2 \, dr \end{aligned} \tag{7}$$

и потому формула (6) преобразуется к виду:

$$\delta = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{5\Delta a_1^5} \int_0^{a_1} \rho \, d(r^5 \alpha) \tag{8}$$

Из формулы (8) вытекает интересное следствие в отношении интеграла

$$D = \int_0^{a_1} \rho \, d(r^5 \alpha)$$

20*

Мы видим теперь, что, каков бы ни был закон распределения плотностей и сжатий внутри планеты, интеграл D в конечном счете выражается по формуле (8) только через сжатие внешней поверхности δ, через отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе φ и через среднюю плотность планеты Δ. Таким образом, первичная зависимость этого интеграла от неизвестного нам внутреннего распределения плотностей слоев ρ и их сжатий α (определяемая самим выражением D) здесь как бы устраняется в силу условий, определяющих равновесие жидкой массы.

Постоянные, обладающие этим замечательным свойством, играют весьма важную роль в современной теории фигуры Земли. Они обычно называются „стоксовыми постоянными".

Заметим, наконец, что в (8) можно положить a_1 равным среднему радиусу планеты и принять его за 1. В таком случае мы имеем:

$$\delta = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{5\Delta}\int_0 \rho \, d(r^5 \alpha) \tag{9}$$

где r под интегралом является уже отвлеченным числом, так что формула (9) связывает только безразмерные отношения.

52 (стр. 140). К § 30. Тот же самый результат получается, разумеется, и из формулы (6) прим. 51, так как в этом случае

$$\frac{\int_0^1 \rho \, d(r^5 \alpha)}{\int_0^1 \rho \, r^2 \, dr} = 3\delta$$

и потому

$$\delta = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{5}\delta, \text{ т. е. } \delta = \frac{5}{4}\varphi$$

53 (стр. 141). К § 31. Обозначая через ρ постоянную плотность ядра и через ρ_1 постоянную плотность жидкости, положим

$$\rho = \rho_1 (1 + f)$$

При условиях интегралы D и A принимают значения (см. прим. 51)

$$D = \rho_1 (1 + f) a^5 \alpha$$

$$A = \frac{1}{3}\rho_1 (1 + f) a^3$$

Подставляя их в формулу (5) прим. 51, найдем:

$$\delta = \frac{6fa^5 a_1^{-2} \alpha + 5\varphi (fa^3 + a_1^3)}{10fa^3 + 4a_1^3} \tag{1}$$

где a — средний радиус ядра, a_1 — средний радиус планеты и f — относительная разность плотностей ядра ρ и жидкой массы ρ_1.

Полагая в (1) $a_1 = 1$ и $\rho_1 = 1$, получим ту формулу, которую Клеро дает в § 31. Заметим, что к ней же пришел иными путями и Лаплас (Méc. Céleste, V, éd. 1882, p. 36—45).

Указание Клеро, что f должно быть численно меньше единицы, еще недостаточно: при отрицательном f знаменатель в (1) может сделаться весьма малым, если a_1 близко к a; в таком случае δ было бы очень велико), что противоречит условиям. Следовательно, отрицательные значения f (т. е. случай ядра, менее плотного, чем жидкость) могут привести по формуле (1) к совершенно иллюзорным результатам.

54 (стр. 141). К § 32. Восстановляя однородность формулы, данной в этом параграфе, т. е. вводя в величину внешнего радиуса a_1, имеем:

$$f = \frac{-pa_1^3}{\frac{3}{2}(a^3 - a^5 a_1^{-2}) + p\left(\frac{5}{2}a^3 + a^5 a_1^{-2}\right)}$$

55 (стр. 141). К § 33. Подставим в предыдущую формулу

$$a = a_1(1 - \lambda)$$

где λ — положительная величина, квадрат которой отбрасываем; это и дает

$$f = -\frac{p}{p + 3\lambda}$$

так что f отличается от -1 на бесконечно малую положительную величину.

56 (стр. 142). К § 33. Очевидно, положительный корень этого уравнения, если он существует, даст величину отношения a/a_1.

57 (стр. 142). К § 34. Если считать a_1 в линейной мере, то формулу § 34 нужно писать в виде:

$$\delta = \frac{5}{4}\varphi + \frac{3a^3 f \gamma}{2a^3 f + 2a_1^3}$$

58 (стр. 143). К § 35. О возражениях Клеро против утверждений Ньютона уже сказано в прим. 36 и будет еще речь в примечаниях к § 51 и 69. Во всяком случае, все то, что Клеро приписывает здесь Ньютону в отношении сжатия Юпитера, есть какое-то непонятное недоразумение.

Уже было указано (прим. 47), что Ньютон определил теоретическую величину сжатия в $1:9\frac{1}{3}$ и сам указывал, что многочисленные наблюдения дают для него величину ме́ньшую, именно от $1:11$ до $1:15$ (а не бо́льшую, как почему-то говорит Клеро). Но, установив это, Ньютон добавил, что сжатие может оказаться меньше величины, полученной из условия однородности, „если плотность по плоскости экватора больше, нежели по полярной оси;... к тому же планеты более нагреваются светом Солнца у своих экваторов, поэтому там несколько более пропекаются, нежели у полюсов“ (перевод академика А. Н. Крылова, стр. 537). Таким образом, возражения Клеро могли бы относиться только к объяснениям, данным Ньютоном, но не к фактам, им установленным.

59 (стр. 143). К § 36. Действительно, из формулы (1) прим. 53 следует, что если $\alpha < 0$ (что соответствует предположению о вытянутом ядре), но при этом

$$|\alpha| > \frac{5\varphi\,(fa^3 + a_1^3)\,a_1^2}{6a^5 f},$$

то и δ, т. е. сжатие внешней поверхности, будет отрицательно, так что планета будет вытянутой. Однако, в силу формулы (1) прим. 53, не исключена возможность, что δ будет отрицательным даже и при $\alpha > 0$, но при условии $f < 0$, т. е. если ядро менее плотно, чем жидкость. Это подчеркивал Даламбер, утверждавший, что им еще в ранней работе „Sur la cause des Vents“ (1747) было доказано, что форма жидкой планеты может быть удлиненной, если даже ядро ее сжатое. Вообще все содержание §§ 31—34 и 36 второй части книги Клеро вызывало многократные возражения Даламбера (Opusc. Mathém., vol. VI, p. 68 и 78); он указывал, например, что предположение $f = -1$, т. е. случай планеты с пустым ядром (§ 33), невозможен, „так как в этом случае все вещество упало бы к центру, и, следовательно, необходимо, чтобы ядро было твердым“; и здесь он был прав, поскольку теперь доказано, что жидкая планета с внутренними полостями существовать не может (так как, по теореме Лихтенштейна, всякая прямая, параллельная оси вращения, не может пересекать жидкую массу больше чем в двух точках).

60 (стр. 144). К § 37. В этом параграфе Клеро получает ту „формулу внешнего сжатия“, которую мы привели уже в прим. 51. Но он выводит ее, делая в формуле (5), прим. 51, $a = a_1$ и $\alpha = \delta$, т. е. полагая в основу ее представление о твердой планете, покрытой бесконечно тонкой пленкой жидкости, внешняя поверхность которой представляет собой эллипсоид с таким же сжатием, как и ядро.

Разумеется, результат подстановки, который Клеро записывает в виде уравнения

$$\underline{10A\delta - 2D = 5A\varphi} \qquad (1)$$

есть то же самое уравнение, которое было дано в формуле (6) прим. 51, если только считать среднее значение радиуса внешней поверхности равным a_1.

Нельзя отрицать, что предположения, на которых Клеро обосновал вывод уравнения (1), носят совершенно нереальный характер. Даламбер указывал, критикуя их, что допущение о подобии фигур жидкой пленки и ядра ни на чем не основано; к тому же, говорил он, из уравнения (1) выпадают плотности жидкой пленки и ядра, которые по необходимости различны (Opusc. Mathém., VI, 1772, p. 75). Но мы видели выше, в прим. 51, что замечательное уравнение, о котором здесь идет речь, может быть получено простейшим образом, не говоря ни о ядре, ни о пленке, но рассматривая сплошную неоднородную жидкую планету и применяя к ней условие равновесия; такой вывод, по существу, имеется уже в Комментарии маркизы дю-Шатлэ (Op. cit., vol. II, p. 242—243). Даламбер этого, очевидно, не учел; удивительно также, что в одной из своих ранних, но и лучших работ, именно в „Теории предварения равноденствий", Даламбер как раз из формулы внешнего сжатия, данной Клеро, вывел замечательную зависимость, связывающую сжатие планеты с прецессионным движением ее оси. К формуле Даламбера мы вернемся в прим. 70, стр. 323.

61 (стр. 145). К § 38. Содержание этого параграфа — единственная непонятная страница в книге Клеро. Самая теорема, которую он здесь доказывает, выражена неясно, а в заключительной ее части она, по нашему мнению, просто неверна. Поэтому мы приведем прежде всего более отчетливую ее формулировку, как она дана в книге маркизы дю-Шатлэ. Там говорится: *

„Если плотность уменьшается непрерывно от центра к поверхности сфероида, то он будет менее сжат, чем если предполагать его однородным если только сжатия также не уменьшаются от центра к поверхности, или, если они уменьшаются, то не в большем отношении, чем квадраты расстояний".

После этой формулировки дю-Шатлэ воспроизводит в точности доказательство, данное Клеро; повторяет его и Тодгэнтер в неоднократно упомянутой уже книге,** но добавляет еще следующее замечание: „Клеро выражает свой результат в очень неудачной словесной форме... он должен был бы сказать: „если только произведение сжатия на квадрат расстояния нигде не имеет большего значения, чем на поверхности". Таким образом, следуя обоим комментариям, мы должны заключать, что сжатие внешней поверхности сфероида должно быть меньше, чем в случае его однород-

* Ук. соч., т. II, стр. 254.

** **Todhunter**, op. cit., vol. I, p. 214—215.

ности, т. е. $\delta < \frac{5}{4}\varphi$, если сжатия возрастают от центра к поверхности или даже если они убывают, но не сильнее, чем r^2, при $r \to 1$.

Между тем, одно из основных положений теории Клеро гласит: сжатия слоев неоднородного сфероида могут только возрастать от центра к поверхности (если плотности убывают в том же направлении); Клеро доказывает эту замечательную теорему в § 63 (см. прим. 76); поэтому о каком бы то ни было убывании сжатий вообще не может быть речи. Более того, формула Клеро для сжатия внешней поверхности, как будет показано ниже (прим. 73, формула 3), может быть приведена к виду:

$$\delta = \frac{5\varphi}{4\left(1 + \frac{1}{2}\eta_1\right)},$$

где через η_1 обозначено значение, которое принимает на внешней поверхности, т. е. при $r = 1$, переменная

$$\eta = \frac{r}{\alpha}\frac{d\alpha}{dr}$$

Таким образом, если во всей жидкой массе сжатие слоев увеличивается, то $\eta_1 > 0$, и тогда $\delta < \frac{5}{4}\varphi$ (это и есть случай природы); если же сжатие слоев уменьшается от центра к поверхности, то $\eta_1 < 0$ и $\delta > \frac{5}{4}\varphi$ (чего в природе не бывает); наконец, случай $\eta < 0$ и $\delta < \frac{5}{4}\varphi$, как утверждает Клеро в заключительной части теоремы, вообще невозможен.

В чем же состоит ошибка его доказательств? Мы видим ее в том, что он принимает закон сжатия слоев в виде

$$\alpha = \delta\left(\frac{1}{r^2} - u\right) \qquad (*)$$

Но такая формула, без особых оговорок относительно функции u, не может быть принята, ибо она могла бы повлечь сколь угодно большие сжатия в центре, а это противоречило бы всей теории, в основе которой лежит предположение о малости сжатий, как это неоднократно подчеркивает сам Клеро (см., например, § 52); следовательно, закон (*) может действовать только для значений r, бóльших некоторого r_0; к тому же при $r = 1$, должно быть $\alpha = \delta$, следовательно, при $r = 1$, $u = 0$. Поэтому функция G, от знака

которой зависит значение δ, по окончательной формуле Клеро в § 38 должна быть определена равенством:

$$G = \int_{r_0}^{1} \rho\, d(r^5 u) = -\rho_0 r_0^5 u_0 - \int_{r_0}^{1} r^5 u\, d\rho \qquad (**)$$

По предположению $d\rho < 0$, так что второй член справа положителен; но первый член существенно отрицателен, и поэтому утверждать, что здесь $G > 0$, невозможно, вопреки мнению Клеро; и еще менее возможно делать в формуле (**) переход $r_0 \to 0$, так как поведение функции u в близости от $r_0 = 0$ неизвестно.

62 (стр. 149). К § 41. Пусть частица μ, находящаяся над центром H диска KOL, смещается в точку M, после чего ее проекция на плоскость диска будет отстоять от его центра на отрезок h, который мы предположим величиной первого порядка малости. Тогда, рассуждая, как в прим. 48, найдем, что проекция притяжения диском частицы μ на перпендикуляр $H\mu$ изменится на величину порядка h^2, и ее прежнее значение F_y превратится в $F_y + ah^2$, где a — конечная постоянная; но сверх этого появится еще и составляющая притяжения F_x в направлении HL, равная (см. прим. 48) бесконечно малой величине bh, где b — тоже конечная постоянная; поэтому равнодействующее притяжение, если отбросить величины порядка h^4, будет:

$$F = F_y + h^2\left(a + \frac{1}{2}\frac{b^2}{F_y}\right)$$

так что притяжение диска на частицу M будет отличаться от притяжения на μ величинами порядка h^2.

Детальное доказательство этой теоремы имеется в Комментарии маркизы дю-Шатлэ (Op. cit., vol. II, p. 224—226).

63 (стр. 154). К § 45. Клеро продолжает развитие формул для притяжения эллипсоида вращения (см. прим. 49) и дает здесь выражение для силы притяжения эллипсоидом внешней точки, лежащей на продолжении его полярной оси (нормаль к эллипсоиду в этом случае совпадает с радиус-вектором внешней точки, так что отрезок CX на фиг. 46 здесь равен нулю); приближенный метод, которым он здесь пользуется, был предложен им еще за шесть лет до появления его книги;* но за это время, в 1742 г., появился трактат Маклорена (A Treatise of Fluxions), где в §§ 651 и 652 дано полное решение задачи о притяжении однородного эллипсоида вращения на внешнюю точку, лежащую на продолжении его экваториаль-

* Philosophical Transactions, № 445, January—June 1737, p. 19—25; (этот номер входит в том XL, опубликованный в 1740 г.)

ной или полярной оси; мы приведем здесь формулы Маклорена без вывода. Обозначая через T_1 и T_2 эти силы притяжения, имеем:

$$T_1 = \frac{2\pi\rho\sqrt{1-e^2}}{e^3}\left(r\arcsin\frac{ae}{r} - \frac{ae\sqrt{r^2-a^2e^2}}{r}\right)$$

$$T_2 = \frac{4\pi\rho\sqrt{1-e^2}}{e^3}\left(ae - r\,\mathrm{arctg}\,\frac{ae}{r}\right)$$

здесь ρ есть плотность эллипсоида, a — его большая полуось, e — его первый эксцентриситет $(a^2e^2 = a^2 - b^2)$, r — расстояние внешней точки от центра эллипсоида, считая в первом случае по плоскости экватора, во втором — по полярной оси.

Здесь нас интересует только T_2, и мы найдем ее приближенное выражение, допустив, что δ — сжатие эллипсоида — есть малая величина, квадратом которой можно пренебречь. В таком случае $e^2 = 2\delta$; поэтому, если возьмем только три первых члена разложения arctg, то найдем:

$$T_2 = \frac{4\pi\rho}{3}\,\frac{a^3(1-\delta)}{r^2}\left(1 - \frac{6}{5}\,\frac{a^2}{r^2}\,\delta\right) \tag{1}$$

вместо чего с той же степенью точности можем написать:

$$T_2 = \frac{4\pi\rho}{3}\,\frac{b^3}{r^2}(1+2\delta)\left(1 - \frac{6}{5}\,\frac{b^2}{r^2}\,\delta\right) \tag{1'}$$

Но легко видеть, что в (1′) множитель перед второй скобкой есть M/r^2, где M — масса эллипсоида. Действительно, так как $a = b\,(1+\delta)$ или $b = a\,(1-\delta)$, то

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho\,a^2b = \frac{4\pi}{3}\rho\,a^3(1-\delta) = \frac{4\pi}{3}\rho\,b^3(1+2\delta),$$

и поэтому формула Маклорена принимает вид

$$T_2 = \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{6}{5}\,\frac{b^2}{r^2}\,\delta\right) \tag{2}$$

Но это и есть формула, которую дает Клеро в конце § 45, где она написана у него (принимая $\rho = 1$) в виде:

$$T_2 = \frac{4\pi}{3}\,\frac{r^3}{e^2}(1+2\delta) - \frac{8\pi}{5}\,\frac{r^5}{e^4}\,\delta$$

где r означает теперь малую полуось эллипсоида и e — расстояние PC (фиг. 50); очевидно, первый ее член и есть M/e^2; вынеся его за скобку, получим с той же степенью точности:

$$T_2 = \frac{M}{e^2}\left(1 - \frac{6}{5}\frac{r^2}{e^2}\delta\right)$$

т. е. формулу (2) Маклорена. Таким образом, Клеро мог получить свой результат одним росчерком пера из §§ 651 и 652 трактата Маклорена; но он пришел к нему своим собственным, простым и изящным способом, основанным на лемме § 43; за независимую переменную он взял при этом ту хорду $MN = 2u$, которую произвольный луч PN образует внутри поверхности сферы, вписанной в эллипсоид (фиг. 50); Клеро вычисляет притяжение сфероидального сегмента, заключенного между этой сферой, эллипсоидом и двумя параллельными плоскостями KM и LN, интегрируя по u от нуля до произвольного значения u; затем, полагая u равным малой полуоси r, Клеро получает притяжение всего тела, заключенного между сферой и эллипсоидом, к которому остается прибавить лишь притяжение сферы. Все это вычисление очень просто и не требует пояснения.

Заметим лишь, что в частном случае, когда точка P лежит в самом полюсе эллипсоида, нужно положить в формуле Маклорена (1) $r \doteq b$, и тогда после простых преобразований получим:

$$T_2{}^0 = \frac{4\pi b \rho}{3}\left(1 + \frac{4}{5}\delta\right) \tag{3}$$

Но множитель перед скобкой есть притяжение сферы радиуса b и плотности ρ на точку, находящуюся на ее поверхности; обозначая это притяжение через T_0, получаем:

$$\frac{T_2{}^0}{T_0} = 1 + \frac{4}{5}\delta \tag{4}$$

Эта формула была известна еще Ньютону. В предложении XIX книги III „Начал" (перевод академика А. Н. Крылова, стр. 532—533) сказано: „я нашел, что если бы Земля состояла из однородного вещества, не обладала бы никаким движением, и отношение ее оси к диаметру было бы равно 100 к 101, то сила тяготения к Земле в точке Q (в полюсе) относилась бы к силе тяготения в той же точке к шару, описанному радиусом CQ, как 126 к 125".

Действительно, в этом примере Ньютона (см. выше, стр. 266)

$$\delta = \frac{101 - 100}{100} = \frac{1}{100}$$

$$T_2{}^0 = T_0\left(1 + \frac{4}{500}\right) = \frac{126}{125}\,T_0.$$

Эта теорема Ньютона и была положена им в основу вывода сжатия однородного вращающегося сфероида, о чем мы говорили уже детально в прим. 3. Напомним еще, что в § 12 второй части Клеро дал ту же формулу (4) со включением высших степеней сжатия δ.

64 (стр. 156). К § 46. Здесь впервые ставится и решается, в пределах поставленной точности, задача о притяжении неоднородного эллипсоида на точку, лежащую на его поверхности. Более общее решение было дано впоследствии Лапласом; но оно было получено при помощи разложений в ряды сферических функций; однако законность и сходимость этих рядов оказались далеко не очевидными.*

Вычисления Клеро распадаются здесь на две части: в первой он определяет притяжение вспомогательного однородного эллипсоида BNF (фиг. 51) на внешнюю точку M и находит радиальную составляющую этого притяжения по MC; во второй части он переходит от вспомогательного эллипсоида к данному эллипсоиду PME, считая его уже неоднородным, и получает радиальную составляющую притяжения этого эллипсоида на ту же точку M, но лежащую теперь на его поверхности. В первой части вычисления Клеро применяет понятие эллипсоида, эквивалентного эллипсоиду BNF в смысле притяжения на внешнюю точку M; оно было введено в § 43. Эквивалентный эллипсоид обладает той же плотностью и той же массой, как и данный эллипсоид BNF; но он повернут вокруг центра C на угол $PCM = \theta$, так что его малая полуось NC приводится в совпадение с радиусом внешней точки, т. е. с прямою MC.

Пусть будет r малая полуось эллипсоида BNF, α его сжатие (на фиг. 51 $r = BC$); для вычисления радиусов NC и MC и для получения сжатия эквивалентного эллипсоида Клеро пользуется некоторыми приближенными формулами, которые легко получить из уравнения эллипса BNF, введя в него угол θ; большая полуось этого эллипса CF (фиг. 51) есть $r' = r(1 + \alpha)$. Поэтому, обозначая через r_1 радиус-вектор точки N относительно центра, имеем:

$$\frac{r_1^2 \sin^2\theta}{r^2(1+2\alpha)} + \frac{r_1^2 \cos^2\theta}{r^2} = 1$$

Отсюда, отбрасывая квадрат сжатия:

$$r_1 = NC = r\,(1 + \alpha \sin^2\theta) \tag{1}$$

Масса эллипсоида BNF есть

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho r^3 (1 + 2\alpha) \tag{2}$$

* Laplace, Méc. Céleste, Livre III, § 14. — Ляпунов. О фигуре небесных тел. Изв. Акад. Наук, 1930, стр. 39.

Пусть α_1 — сжатие эквивалентного эллипсоида; так как его малая полуось есть r_1 и плотность ρ, то для его массы M имеем выражение:

$$\frac{4\pi}{3}\rho r_1^3(1+2\alpha_1)$$

или, с точностью до величин первого порядка,

$$M=\frac{4\pi}{3}\rho r^3\;(1+3\alpha\;\sin^2\theta+2\,\alpha_1) \tag{2'}$$

Приравнивая, по условию, выражения M в (2) и в (2′), получаем:

$$\alpha_1=(1-\frac{3}{2}\sin^2\theta)\,\alpha \tag{3}$$

Наконец, расстояние точки M до центра эквивалентного эллипсоида определяется через параметры основного эллипсоида PME; Клеро обозначает его малую полуось PC через e и сжатие через δ; поэтому

$$MC=e_1=e\;(1+\delta\sin^2\theta) \tag{4}$$

Теперь задача сводится к тому, чтобы определить притяжение эквивалентного эллипсоида, с малой полуосью r_1 и сжатием α_1, на внешнюю точку M, находящуюся в расстоянии e_1 от его центра; по формуле Маклорена — Клеро [прим. 63, формула (1′)], здесь получим:

$$T_2=\frac{4\pi\rho}{3e_1^2}r_1^3\;(1+2\alpha_1)\;(1-\frac{6}{5}\frac{r^2}{e^2}\alpha_1) \tag{4}$$

причем внутри второй скобки множитель r_1^2/e_1^2 заменен на r^2/e^2, так как α_1 — величина первого порядка малости. Подставляя в (4) выражения r_1, α_1 и e_1 и сохраняя только величины первого порядка, найдем (см. стр. 115):

$$T_2=\frac{4\pi\rho\,r^3}{3e^2}-\frac{8\pi\rho\delta}{3e^2}r^3\sin^2\theta+\frac{8\pi\rho}{3e^2}r^3\alpha-\frac{8\pi\rho}{5e^4}r^5\alpha+\frac{12\pi\rho}{5e^4}r^5\alpha\sin^2\theta \tag{5}$$

На этом закончено решение первой задачи, т. е. вычислено притяжение однородного эллипсоида BNF на точку M. Теперь остается принять плотность ρ слоев этого эллипсоида и их сжатие α переменными, т. е. обратиться к приему, которым Клеро пользовался уже дважды (§§ 13 и 28), и затем проинтегрировать дифференциал притяжения по всему объему исходного эллипсоида PME.

Мы примем здесь средний радиус эллипсоида (обозначаемый у Клеро через e) за 1; применяя к выражению (5) формулу (4) прим. 51, найдем, что в окончательную формулу войдут три „массовых интеграла"; значе-

ния их зависят от закона распределения плотностей слоев и их сжатий, а именно:

$$A = \int_0^1 \rho r^2 \, dr, \qquad B = \int_0^1 \rho \, d(r^3\alpha), \qquad D = \int_0^1 \rho \, d(r^5\alpha) \tag{6}$$

заметим, что мы пишем в них $d(r^3\alpha)$ вместо $\frac{d}{dr}(r^3\alpha)\,dr$ и т. п.

С интегралами A и D мы уже встречались выше (прим. 50 и 51); нужно заметить, что только первый из них есть величина конечная, интегралы D и B — бесконечно малые величины порядка сжатия. Введя эти обозначения, мы и получим ту формулу, которую дает здесь Клеро (стр. 156)

$$T_2 = 4\pi A\,(1 - 2\delta\sin^2\theta) + \frac{8\pi}{3}B + \frac{8\pi}{5}D\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right) \tag{7}$$

Таково выражение радиальной составляющей притяжения неоднородного эллипсоида PME на точку M на его поверхности на геоцентрической широте $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, вычисленное с точностью до членов первого порядка сжатия включительно (члены с B и D).

65 (стр. 158). К § 48. Закон изменения силы тяжести на сфероиде. „Коэффициент Клеро“. Клеро выводит здесь одну из основных формул его теории и дает закон изменения силы тяжести на неоднородном сфероиде. Вместо „силы тяжести“ правильнее говорить про ускорение силы тяжести g; поэтому формула, полученная в этом параграфе, может быть представлена в виде:

$$g = g_1 - \gamma_1 \sin^2\theta \tag{1}$$

причем g_1 — ускорение силы тяжести на полюсе и θ — угол PCM (фиг. 51), приближенно равный дополнению географической широты φ (она отличается от геоцентрической на величины первого порядка сжатия). Для g_1 и γ_1 Клеро получает в § 47 и 48 выражения:

$$g_1 = 4\pi A + \frac{8\pi}{3}B - \frac{8\pi}{5}D$$

$$\gamma_1 = 8\pi A\delta + 4\pi A\varphi - \frac{12}{5}\pi D. \tag{2}$$

Второе из них обнаруживает, что γ_1 есть величина первого порядка малости, так что формулу (1) с принятой здесь точностью можно написать и в виде

$$g = g_1 - \gamma_1 \cos^2\varphi \tag{3}$$

Обозначим через g_0 ускорение силы тяжести на экваторе ($\varphi = 0$), так что

$$g_0 = g_1 - \gamma_1,$$

и введем „коэффициент Клеро" (см. прим. 4, стр. 268):

$$\beta = \frac{\gamma_1}{g_1 - \gamma_1} = \frac{g_1 - g_0}{g_0} \qquad (4)$$

Вместо (3) мы получаем теперь, сохраняя только первую степень γ_1:

$$g = g_0 (1 + \beta \sin^2 \varphi) \qquad (5)$$

это и есть (в ее обычном написании) формула Клеро для распределения силы тяжести на поверхности неоднородного сфероида, являющаяся незыблемой основой всей теоретической гравиметрии и геодезии.

Для коэффициента β из предыдущих формул вытекает тоже весьма важное выражение; чтобы получить его, можно отбросить в формуле (4) весьма малую величину γ_1 в знаменателе и заменить g_1 на его конечную часть, т. е. на $4\pi A$; поэтому из (2) получается:

$$\beta = \frac{\gamma_1}{4\pi A} = 2\delta + \varphi - \frac{3}{5}\frac{D}{A} \qquad (6)$$

Мы видим, что в выражение β, помимо величин δ и φ, определяемых на поверхности Земли, входит только отношение интегралов D и A; к тому же коэффициент β тоже есть величина, принципиально определимая из наблюдений на поверхности Земли, так же как сжатие δ и отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе, т. е. φ; так как интеграл A весьма просто выражается через среднюю плотность Земли (т. е. через ее массу и объем), то формула (6) снова обнаруживает особенное свойство интеграла D, являющегося „стоксовой постоянной" (см. прим. 51, стр. 308).

66 (стр. 159). К § 49. Теорема Клеро. Содержание ее и формулировка, которую ей дал Лаплас, уже были приведены в Комментарии к Введению (стр. 269). Но теперь мы должны выяснить, в чем собственно состоит глубокий смысл этой замечательной теоремы. По формуле (6) прим. 65 мы получили для коэффициента Клеро выражение:

$$\beta = 2\delta + \varphi - \frac{3}{5}\frac{D}{A} \qquad (1)$$

значение интегралов D и A определяется внутренним строением планеты, именно законом распределения плотностей и сжатий ее слоев. Нет ли возможности освободиться от этих интегралов в выражении β и получить таким образом зависимость между параметрами β, δ и φ, не связанную с каким-либо специальным законом строения планеты?

Оказывается, достигнуть этого очень просто, так как теория Клеро дала нам уже другую важную формулу, которую мы назвали „формулой внешнего сжатия“ (§ 37, прим. 54 и 60), а именно:

$$\delta = \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{5}\frac{D}{A} \qquad \text{(II)}$$

Так как в I и II входят только отношения интегралов D и A, то оба они совместно из них и исключаются, и в результате этой элементарной операции мы получаем как раз зависимость между β, δ и φ, удовлетворяющую поставленным выше условиям, именно

$$\beta + \delta = \frac{5}{2}\varphi \qquad \text{(III)}$$

Это и есть „теорема Клеро“. Принципиальная ее важность, которую впервые отметил Дж. Стокс,* состоит в том, что она имеет место в силу самых условий равновесия неоднородной планеты и не зависит от условий ее внутреннего строения; разумеется, нужно предположить, что по их структуре внутренние слои весьма близки к сферам, — иначе весь вывод этой теоремы не имел бы места. Но не требуется даже предполагать, что все слои были первоначально жидкими; важно лишь, чтобы внешняя поверхность имела такую форму, как если бы она находилась в относительном равновесии, вращаясь с постоянной угловой скоростью, которая предполагается „медленной“ — в том смысле, как это было объяснено выше, т. е. чтобы параметр φ был величиной малой порядка сжатия.

Теорема Клеро точнá только до первой степени сжатия. Дальнейшее развитие ее, с учетом величин второго порядка малости, рассматривается в ряде работ, из которых важнейшей является: G. Darwin. The theory of the Figure of the Earth, carried to the second order of Small Quantities. Coll. Works, vol. III, p. 78.

Однако следует подчеркнуть, что при этом развитии теории Клеро ее „стоксовы свойства“ теряются, и в вычисление входят величины второго порядка, которых нельзя получить иначе, как введя те или иные допущения о внутреннем строении планеты.

О другой форме этой же „теоремы Клеро“ будет сказано ниже, в прим. 73, стр. 334.

В заключение целесообразно иллюстрировать точность теоремы Клеро, применяя ее условно к Земле и воспользовавшись для этого данными современной геодезии и геофизики. Мы имеем для нашей планеты:

$$\delta = \frac{a-b}{b} = \frac{1}{296.0} = 0.003378,$$

$$\varphi = \frac{1}{288.4} = 0.003468;$$

* G. G. Stokes. On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth. Coll. Works, vol. II, p. 131.

отсюда:

$$\frac{5}{2}\varphi=\frac{1}{115.4}=0.008670$$

и по теореме Клеро:

$$\beta=\frac{1}{115.4}-\frac{1}{296.0}=\frac{1}{188.1}=0.005292$$

Между тем, экспериментальные определения величины силы тяжести и теория, точная до членов второго порядка включительно, дают:

$$\beta=\frac{1}{188.4}=0.005284$$

Этот результат обнаруживает, что вся теория Клеро принципиально приложима к Земле и что точность „первого приближения" здесь очень высока: относительное расхождение между обоими значениями β составляет лишь 1 : 650.

67 (стр. 160). К §§ 50 и 51. Как уже неоднократно отмечалось (см. прим. 36 и 58), возражения Клеро против Ньютона проистекают в значительной мере оттого, что Клеро имел перед собой только 1-е и 2-е издания „Начал" (1687 и 1713 гг.);* но содержание предложения XX третьей книги было довольно значительно видоизменено Ньютоном в 3-м издании (перевод академика А. Н. Крылова, стр. 531—541); здесь, например, Ньютон подчеркивает, что предложение его о том, что „веса колен жидкости обратно пропорциональны длине колен", было бы действительно только для однородной Земли, сжатие которой равно 1/230 (см. выше, прим. 44). Далее, произведя детальное исследование имевшихся в его распоряжении определений длины секундного маятника, Ньютон утверждает только, что разности этих длин, исправленные за теплоту под экватором, приводят к величине полного укорочения маятника от полюса к экватору в $1^{1}/_{12}$ линии, что весьма близко совпадает с теоретической величиной в 1.087 линии (про которую и упоминает Клеро в § 51); но Ньютон отнюдь не говорит здесь, что наблюденное укорочение равно 2 линиям, ни того, что разность осей в $17^{1}/_{6}$ мили нужно в каком-либо отношении увеличить. Таким образом, Клеро возражает здесь в основном против таких утверждений Ньютона, которые сам Ньютон значительно видоизменил в 3-м издании „Начал".

Давид Грегори (David Gregory, 1661—1708), профессор астрономии в Оксфорде, опубликовал в 1702 г. книгу „Astronomiae Physicae et Geometricae Elementa". В небольшом разделе, относящемся к теории Солнца и планет, ничего значительного не содержится. Но здесь он действительно

* Это тем более удивительно, что перевод маркизы дю-Шатлэ сделан с 3-го издания „Начал" (1725 г).

делает два ошибочных утверждения. Во-первых, он говорит, что сила тяжести на поверхности изменяется обратно пропорционально радиусу, тогда как эта теорема верна (и притом только в случае однородной планеты) для составляющей силы тяжести по радиусу (см. § 18 и прим. 44). Вторая его ошибка состоит в утверждении, что если бы Земля была неоднородной и в центре плотнее, чем в остальных частях, то сжатие ее было бы больше 1/230, т. е. как раз обратное тому, что вытекало из теории Клеро и составляло как бы самую ее сущность.

68 (стр. 165). К главе IV. Эта глава является центральной и несомненно наиболее глубокой во всей книге Клеро; здесь он выводит знаменитое интегро-дифференциальное уравнение, связывающее плотности и сжатия слоев неоднородной жидкой планеты, находящейся в относительном равновесии при „медленном“ вращении. При выводе этого уравнения (§ 55) Клеро допускает, что уровенные поверхности суть слабо сжатые эллипсоиды; однако в формулировке самой теоремы он идет значительно дальше и утверждает, что при введенных им условиях и ограничениях уровенные поверхности могут быть только эллипсоидами, так что возможность всяких других фигур равновесия, близких к сфере, исключается. Очевидно, что такая формулировка по своей общности значительно превосходит объем доказанных положений, что и отмечал академик Ляпунов в тех словах, которые мы цитировали выше (стр. 256). Однако впоследствии Лаплас, Пуанкарэ и Пицетти приводили различные доказательства утверждения Клеро, взятого во всей его полноте; наконец, сам А. М. Ляпунов и после него Л. Лихтенштейн,* рассматривая „проблему Клеро“ в ее наибольшей общности, пришли в первом приближении именно к эллипсоидальным сфероидам Клеро, как фигурам равновесия; поэтому теперь мы вправе сказать, что если утверждение Клеро и было необоснованным, то оно все же полностью оправдано в дальнейшем развитии науки.

69 (стр. 166). К § 54. Доказательство основано на теореме Ньютона о том, что однородный слой, заключенный между двумя подобными эллипсоидами, не действует на точку, заключенную внутри его полости, или на его внутренней границе.** Поэтому притяжение эллипсоида rqC (фиг. 52) на внутреннюю точку N равно притяжению на ту же точку подобного ему эллипсоида $fNgC$, а притяжение эллипсоида RQC на точку N равно

---

* Laplace, Méc. Céleste, Livre III, § 29—30. — Poincaré. Figures d'Equilibre, p. 65. — Пицетти. Основы механической теории фигуры планет, стр. 143. — Ляпунов. Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes, 1903. — Lichtenstein. Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, 1933, S. 123.

** Предложение XCI книги 1-й, задача XLV; перевод академика А. Н. Крылова, стр. 275—276.

притяжению подобного ему эллипсоида $FNgC$. Поэтому притяжение слоя $rRqQ$ равно разности притяжений обоих указанных эллипсоидов на точку N, находящуюся на их внешней поверхности. Клеро определяет здесь бесконечно малую составляющую этого притяжения по направлению CV, пользуясь формулой (2) прим. 50:

$$F' = \frac{4\pi}{5} CV \cdot \left(\frac{r}{e}\right)^5$$

Но в данном случае, так как точка лежит на поверхности, $r = e$; к тому же для CV имеется формула, о которой сказано в прим. 35, именно $CV = 2q\delta$, где $q = NL$ и δ — сжатие эллипсоида; таким образом, здесь

$$F' = \frac{8\pi}{5} q\ (\delta - \varepsilon),$$

где через δ и ε обозначены сжатия обоих данных эллипсоидов.

70 (стр. 171). К § 55. Дифференциальное уравнение Клеро. Сжатие внешней поверхности. Формула Даламбера для предела сжатия Земли. Уравнение, которое Клеро выводит в этом параграфе, выражает собой условие равновесия любого слоя неоднородной жидкой планеты, находящейся в жестком вращении. Метод, которым он здесь пользуется, тот же самый, который был применен в § 29 (прим. 51), именно замыкание силового треугольника CNV; но для этого требуется, чтобы конечная часть силы притяжения, действующая на частицу N в радиальном направлении CN, так относилась к сумме проекций бесконечно малых составляющих, действующих по направлению CV, как $CN : CV$, т. е. как $r : 2q\alpha$; однако для того чтобы написать это последнее отношение, надо допустить априорно, что слой FNG (фиг. 53) представляет собою слабо сжатый эллипсоид, так как только при этом условии $CV = 2q\alpha$, где $q = NL$ и α — сжатие эллипса FNG. В остальном вывод Клеро совершенно нагляден, и чтение его затрудняется только тем, что он не пользуется еще обозначением пределов при написании определенных интегралов; например, он говорит (стр. 169): „Так как это притяжение уменьшается при увеличении r, то если обозначить через F величину, которую принимает $\int \rho d\alpha$ при $r = 1$, то

$$\frac{8\pi}{5} q \left(F - \int \rho\ d\alpha\right)$$

представит собой...“ и т. д.

Очевидно, мы можем просто написать вместо этого:

$$\frac{8\pi}{5} q \int\limits_r^1 \rho\ d\alpha$$

и аналогично в отношении остальных интегралов. После этих замечаний резюмируем весь вывод Клеро в современных обозначениях:

1) от конечной составляющей притяжения сфероида FNG на точку N по направлению радиуса CN достаточно взять только ее главную часть, равную притяжению сферы среднего радиуса r, т. е. положить

$$F = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \rho r^2 \, dr$$

2) бесконечно малая составляющая притяжения сфероида FNG по направлению CV; допуская, что меридианное сечение его есть эллипс со слабым сжатием α (см. прим. 50, формула 5):

$$F_1 = \frac{8\pi q}{5r^5} \int_0^r \rho \, d\,(r^5\alpha)$$

где ордината $q = NL$ (фиг. 53);

3) притяжение слоя $PEGF$ на внутреннюю точку N; для однородного сфероида оно было бы равно нулю, по теореме Ньютона; здесь оно бесконечно мало́, так как сжатия слоев бесконечно малы; применяя теорему, доказанную в § 54, и полагая разность сжатий эллипсоидов, ограничивающих слой, т. е. величину $\delta - \varepsilon$ из § 54, равной $d\alpha$, получаем для проекции этого притяжения на направление CV выражение

$$F_2 = \frac{8\pi}{5} q \int_r^1 \rho \, d\alpha$$

4) центробежная сила, действующая параллельно CV; ее величина (см. § 29, прим. 51) есть

$$F_3 = 4\pi \, Aq\varphi$$

где

$$A = \int_0^1 \rho r^2 \, dr$$

Условие равновесия сфероида дает теперь

$$\frac{F}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{r}{2q\alpha}$$

и приводится к виду:

$$5r^2\alpha \int_0^r \rho r^2 \, dr = \int_0^r \rho \, d\,(r^5\alpha) + r^5 \int_r^1 \rho \, d\alpha + \frac{5}{2} A\varphi r^5$$

В последний член справа, в который входит постоянная A, следует ввести угловую скорость вращения планеты; так как радиус экватора можно принять равным среднему радиусу планеты, т. е. 1, как здесь полагает Клеро, то центробежная сила на экваторе есть ω^2; притяжение там же равно $4\pi A$; следовательно,

$$4\pi A\varphi = \omega^2$$

$$\frac{5}{2} A\varphi r^5 = \frac{5}{8\pi} \omega^2 r^5$$

После всего этого уравнение Клеро приводится к его окончательной форме:

$$\alpha \int_0^r \rho r^2 \, dr - \frac{1}{5r^2} \int_0^r \rho d(r^5 \alpha) - \frac{r^3}{5} \int_r^1 \rho \, d\alpha = \frac{\omega^2 r^3}{8\pi f} \qquad \text{(I)}$$

Следуя Тодгэнтеру,* мы будем называть это уравнение „первичным уравнением“ Клеро; оно содержит в себе, с точностью до первой степени величин δ и φ, всю теорию неоднородных жидких планет. Замечательный и элементарный вывод, который дал для него сам Клеро, впоследствии был заменен множеством других — начиная от Лапласа и кончая Ляпуновым и Лихтенштейном.**

Весьма удивительно, что Клеро, повидимому, не обратил внимания на то, что из его уравнения, если применить его к внешней поверхности, т. е. написать условие равновесия жидкой массы в ее целом, легко получается та „формула внешнего сжатия“, к которой он пришел довольно искусственным путем в § 37 (см. прим. 51 и 60). Действительно, доведем в уравнении (I) интегрирование до пределов жидкой массы, положив в первичном уравнении $r = 1$. Тогда переменное сжатие α превратится в сжатие внешней поверхности δ, первый и второй интегралы примут уже хорошо известные нам значения A и D (см. прим. 51); свободный член сделается равным $\frac{A\varphi}{2}$; таким образом, мы получим:

$$A\delta - \frac{1}{5} D = \frac{A\varphi}{2}$$

* Todhunter, op. cit, vol. I, p. 224.

** Laplace, Méc. Cél., livre III, n° 29; livre XI, n° 6. — L. Lichtenstein. Gleichgewichtsfiguren (1933), S. 123—125; см. также H. Jeffreys. The Earth (1929), p. 203—231. — A. Liapounoff. Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes. Зап. Акад. Наук, VIII серия, XIV, № 7 (1903); этот вывод изложен нами в приложении к книге: Аппелль. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. 1936, стр. 320—336; см. также Пицетти, ук. соч., стр. 133 и сл.

или

$$\delta = \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{5}\frac{D}{A} \tag{1}$$

Это и есть формула сжатия внешней поверхности, имевшая уже столь важное значение при выводе теоремы Клеро (§ 49, прим. 66).

К формуле (1) непосредственно примыкает весьма важная формула для верхнего предела сжатия, которую дал Даламбер в знаменитом мемуаре о предварении равноденствий.* Пусть C и A означают соответственно полярный и экваториальный моменты инерции Земли; обозначим через I так называемое механическое сжатие Земли:

$$I = \frac{C - A}{C}$$

Этот параметр определяется из астрономических наблюдений (прецессионное движение земной оси); таким образом, он связан не с внутренним, а с внешним гравитационным полем Земли, производимым действием на нее Солнца и Луны. Для Земли имеем:

$$I = 0.003277 = 1 : 305.2.$$

Даламбер дал для этого параметра чрезвычайно важное выражение (точное до первой степени сжатия внутренних слоев), именно:

$$I = \frac{\int\limits_0^1 \rho\, d(r^5 \alpha)}{\int\limits_0^1 \rho\, dr^5} \tag{2}$$

В случае однородной планеты $\rho = \text{const}$ и сжатие α имеет для всех слоев одинаковое значение, равное его величине δ на внешней поверхности; таким образом, в этом случае

$$I = \delta.$$

Напомним теперь, что интегралы D и A в формуле Клеро (1) имеют следующие значения (стр. 136 и 137):

$$D = \int\limits_0^1 \rho\, d(r^5 \alpha); \qquad A = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \rho\, dr^3$$

* D' Alembert. Recherches sur la précession des équinoxes. 1749, p. 95—103.

Мы можем написать, очевидно:

$$\frac{D}{A} = 3\,\frac{\int \rho\, d(r^5\alpha)}{\int \rho\, dr^5}\cdot\frac{\int \rho\, dr^5}{\int \rho\, dr^3}$$

и формула Клеро (1) принимает вид:

$$\delta = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{5}\,I\cdot\frac{\int \rho\, dr^5}{\int \rho\, dr^3} \tag{3}$$

где все интегралы имеют пределами 0 и 1.

Важность этого соотношения, данного Даламбером, весьма велика так как в нем впервые связано внутреннее и внешнее гравитационное поле Земли.

Далее, Даламбер показал, что если только плотность ρ не возрастает от центра к поверхности, то отношение обоих интегралов в правой части (3) не может превосходить 1.

Действительно, интегрируя по частям от центра (где $\rho = \rho_0$, $r = 0$) до внешней поверхности ($\rho = \rho_1$, $r = 1$), найдем:

$$\int_0^1 \rho\, dr^5 = \rho_1 - \int_0^1 r^5\, d\rho$$

$$\int_0^1 \rho\, dr^3 = \rho_1 - \int_0^1 r^3\, d\rho$$

откуда

$$\int_0^1 \rho\, dr^5 - \int_0^1 \rho\, dr^3 = \int_0^1 (r^3 - r^5)\, d\rho$$

Под интегралом справа первый множитель положителен, так как $r < 1$; но $d\rho \leqslant 0$ по условию, и поэтому:

$$\int_0^1 \rho\, dr^5 \leqslant \int_0^1 \rho\, dr^3$$

Таким образом, из (3) получается:

$$\delta \leqslant \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{5}\,I \tag{4}$$

причем знак равенства имеет место только в случае однородной планеты. Подставляя в это выражение численные данные для Земли

$$\varphi = 0.003468; \qquad I = 0.003277,$$

получаем

$$\delta \leqslant 1:270,$$

и эта величина, которую мы можем назвать Даламберовым пределом сжатия Земли, превосходит наблюденное значение ее сжатия ($\delta = 1:297$) всего на $^1/_{10}$ его величины.

Дальнейший прогресс в определении теоретического предела сжатия был осуществлен только Радо и Пуанкарэ, которые нашли, как мы увидим в следующем прим. 71, некоторую поправку к коэффициенту $^3/_5$ в формуле Даламбера (4).

71 (стр. 172). К § 56. Преобразования первичного уравнения. Уравнение Клеро — Радо. Предел сжатия, по Радо — Пуанкарэ. Преобразования, которым Клеро подвергает первичное уравнение (I) (прим. 70), остались классическими и приводятся во всех трактатах по теории фигуры Земли.* Путем двойного дифференцирования этого уравнения по независимой переменной r Клеро освобождается от обоих интегралов, содержащих искомую функцию $\alpha(r)$ и ее производную по r, т. е. от второго и третьего интеграла в левой части (I), стр. 325; после первого дифференцирования и упрощений получается уравнение:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{d\alpha}{dr} + \frac{2\alpha}{r^3}\right) A(r) = \int\limits_r^1 \rho\, d\alpha + \frac{5}{8}\,\omega^2 \qquad \text{(II)}$$

где для сокращения письма положено

$$A(r) = \int\limits_0^r \rho r^2\, dr.$$

Второе дифференцирование дает:

$$\frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{2\rho r^2}{A(r)}\frac{d\alpha}{dr} + \left(\frac{2\rho r}{A(r)} - \frac{6}{r^2}\right)\alpha = 0 \qquad \text{(III)}$$

это — линейное уравнение второго порядка для сжатия слоев $\alpha(r)$, с переменными коэффициентами, зависящими от r как непосредственно, так и через плотность ρ, которая сама предполагается функцией r. Тодгэнтер предлагает называть (III) „производным уравнением“ Клеро.**

* Пицетти. Основы механической теории фигуры планет, перев. 1933, стр. 136—140. — Tisserand. Traité de Méc. Céleste, vol. II, p. 203—222.

** Todhunter, loc. cit., p. 225: „primitive equation“ and „derived equation“.

От этого линейного уравнения второго порядка Клеро переходит к нелинейному уравнению первого порядка, вводя вместо $\alpha(r)$ новую зависимую переменную $u(r)$ при помощи подстановки:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dr}=u \tag{IV}$$

Уравнение (III) приводится теперь к виду:

$$\frac{du}{dr}+u^2=-\frac{2u\rho r^2}{A(r)}+\frac{6}{r^2}-\frac{2\rho r}{A(r)} \tag{V}$$

Наконец, Клеро упрощает (V), полагая

$$t=u+\frac{\rho r^2}{A(r)} \tag{VI}$$

и получает окончательно:

$$\frac{dt}{dr}+t^2=\frac{r^2}{A(r)}\frac{d\rho}{dr}+\frac{6}{r^2} \tag{VII}$$

Таким образом, основная зависимость, связывающая плотности слоев ρ и их сжатия α, выраженная первичным уравнением (I), приведена теперь к уравнению (VII), типа Рикатти;* Клеро заканчивает эти преобразования указанием, что уравнение (VII) удалось интегрировать только при одном частном предположении, когда оно приводится к однородному.

Кроме преобразований уравнения (III), предложенных Клеро, имеется еще и ряд других (например А. М. Лежандра; их можно найти в указанных выше источниках; но мы остановимся здесь только на весьма простом и важном преобразовании, которое предложил Радо;** вместо переменной u, которую Клеро вводил в уравнение (III), Радо применяет подстановку

$$\eta=ru=\frac{r}{\alpha}\frac{d\alpha}{dr}=r\frac{d\log\alpha}{dr} \tag{VIII}$$

и получает из (III) нелинейное уравнение первого порядка:

$$r\frac{d\eta}{dr}-\eta+\eta^2=-2F\cdot(1+\eta)+6, \tag{IX}$$

* Оно было предложено в 1722 г., т. е. за 20 лет до появления книги Клеро, итальянским „приватным" математиком Giacomo Ricatti и явилось предметом оживленной переписки математиков первой половины XVIII столетия (Эйлер, Гольдбах и др.).

** M. Radau. Remarques sur la théorie de la figure des planètes. Bull. Astron., vol. 2, 1885, p 157; см. также: Poincaré. Figures d'Equilibre, p. 91—96; H. Jeffreys. The Earth (1929), p. 214.

где введено обозначение:

$$F = \frac{r^3 \rho}{A(r)}$$

Именно в этой форме уравнение (IX) послужило источником весьма важных результатов для теории фигуры Земли, в особенности для вывода теоретической величины верхнего предела сжатия. Но мы должны здесь ограничиться лишь немногими указаниями. Пусть η_1 означает величину параметра Радо на поверхности планеты; тогда, по формуле Пуанкарэ,

$$\frac{\int_0^1 \rho\, dr^5}{\int_0^1 \rho\, dr^3} = \frac{5}{3}\left[1 - \frac{2}{5}\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{\Psi(\eta_0)}\right]$$

Здесь в правой части $\Psi(\eta)$ есть определенная функция от η, весьма мало меняющаяся на всем интервале допустимых значений этого параметра; ее максимум равен 1.00075; η_0 есть некоторое среднее, в точности неизвестное, значение этого параметра.

Подставляя только что написанное выражение для отношения интегралов в формулу Даламбера (3), прим. 70, стр. 327, получаем:

$$\delta = \frac{\varphi}{2} + l\left[1 - \frac{2}{5}\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{\Psi(\eta_0)}\right] \qquad \text{(X)}$$

Эта формула и раскрывает ту поправку к „множителю Даламбера“, о которой мы говорили в прим. 70, стр. 328.

Из (X), заменяя $\Psi(\eta_0)$ на максимальное значение Ψ, найдем:

$$\delta \leqslant \frac{\varphi}{2} + l\left[1 - \frac{2\sqrt{1+\eta_1}}{5.00375}\right] \qquad \text{(XI)}$$

Значение параметра η_1 получается из так называемой „второй формы уравнения Клеро“ (см. прим. 73, стр. 334):

$$\eta_1 = \frac{5\varphi}{2\delta} - 2$$

Подставляя соответствующие данные для Земли:

$$\varphi = 0.003468; \qquad l = 0.003277$$

и принимая в правой части наблюденное значение:

$$\delta = 1 : 297.0 = 0.003368$$

находим:

$$1 + \eta_1 = 1.575$$

и отсюда теоретический предел сжатия (точный до величины порядка первой степени сжатия):

$$\delta \leqslant 1:297.1$$

иными словами, мы констатируем фактически полное совпадение результата теории Клеро с данными геодезических измерений.*

72 (стр. 175). К § 57. **Закон плотностей Клеро—Джорджа-Дарвина.** Клеро проводит здесь интегрирование уравнений § 56 и определяет сжатие слоев в функции расстояния, приняв для их плотности простейшую зависимость от r, в виде $\rho = r^n$. Мы связываем этот закон с именами Клеро и Дж. Дарвина благодаря тому любопытному обстоятельству, что Дж. Дарвин в 1884 г. предложил, как новое, как раз то решение уравнений Клеро, которое сам автор „Теории фигуры Земли" дал в своей книге в 1743 г.**

Разумеется, окончательные формулы обоих авторов совершенно тождественны; но вывод их у Дж. Дарвина значительно проще: он исходит не из уравнения типа Рикатти, которым пользуется здесь Клеро, а из линейного дифференциального уравнения второго порядка для сжатия слоев $\alpha(r)$ (см. прим. 70, уравнение III); подставляя в него $\rho = r^n$, он получает уравнение:

$$r\frac{d^2\alpha}{dr^2} + 2(n+3)\frac{d\alpha}{dr} + 2n\frac{\alpha}{r} = 0 \tag{1}$$

Этому уравнению, как легко видеть, можно удовлетворить частным решением вида:

$$\alpha = cr^m,$$

где коэффициент c остается пока совершенно неопределенным, а для m получается, после подстановки и сокращения на r^{m-1}, уравнение:

$$m^2 + (2n+5)m + 2n = 0$$

---

* Исследование того же вопроса о пределах сжатия с учетом членов второго порядка см.: R. Wavre. Figures planétaires et Géodésie. 1932, p. 62—64.

** G. Darwin. On the figure of Equilibrium of a planet of heterogeneous density. Scient. Papers, vol. III, p. 69—77, где Дж. Дарвин определенно называет это решение „своим" („my solution", p. 75); объяснение этому случаю надо искать, вероятно, в том, что в упомянутой книге Тодгэнтера (1873), где дан довольно детальный анализ всех работ Клеро по теории фигуры Земли, об этом законе не упомянуто вовсе.

оно имеет два вещественных корня:

$$m_1 = -n - \frac{5}{2} + q$$

$$m_2 = -n - \frac{5}{2} - q$$

где

$$q = \sqrt{n^2 + 3n + \frac{25}{4}}$$

так что общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$\alpha = c_1 r^{m_1} + c_2 r^{m_2}$$

Но в данной задаче $n < 0$, так как плотности увеличиваются к центру; поэтому $m_1 > 0$ и $m_2 < 0$; далее, сжатие слоев должно быть конечным в центре и возрастать от центра к поверхности (это особая теорема, которую Клеро дает дальше в § 63); поэтому мы должны положить $c_2 = 0$ и принять окончательно

$$\alpha = c_1 r^{m_1}. \tag{2}$$

Значение постоянной c_1 теперь очевидно: это есть сжатие при $r = 1$, т. е. сжатие внешней поверхности, которое мы обозначаем здесь через δ. Но в качестве общего метода для определения этой постоянной Клеро подставляет выражение (2) в основное уравнение § 55 (см. стр. 170), и приравнивает нулю ту постоянную его часть, которая происходит от интегралов:

$$\int_r^1 \rho\, d\alpha + \frac{5}{2}\varphi \int_0^1 \rho r^2\, dr$$

Подстановка в них $\rho = r^n$ и $\alpha = c_1 r^{m_1}$ приводит к условию

$$\frac{m_1 c_1}{n + m_1} + \frac{5}{2}\,\frac{\varphi}{n+3} = 0$$

которое дает, по упрощении:

$$c_1 = \frac{5\varphi}{2\left(q - n - \frac{1}{2}\right)} \tag{3}$$

это и есть уравнение, к которому приходит Клеро (у него c_1 обозначено через δ). Но так как c_1 и φ для планеты известны из определений ее фигуры и ее вращения, то уравнение (3) позволяет определить n.

Поясним это для случая Земли; здесь имеем

$$c_1 = \delta = 1/297, \qquad \varphi = 1/288.4$$

и приближенное решение уравнения (3) дает

$$n = -1.04; \qquad m_1 = +0.59$$

Написав еще выражение для ρ в виде

$$\rho = \rho_1 r^n,$$

где ρ_1 есть плотность внешнего слоя, которая для Земли может быть принята равной средней плотности верхнего строения ($\rho_1 = 2.72$), получаем следующую окончательную формулировку закона Клеро — Дарвина для Земли:

$$\rho = 2.72\, r^{-1.04}$$

$$\alpha = \frac{1}{297} r^{0.59}$$

Как уже было замечено, показатель $n < 0$. Но для массы планеты имеем

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2\, dr = \frac{4\pi \rho_1 R^{n+3}}{n+3}$$

где R — ее средний радиус; поэтому $|n| < 3$, иначе масса была бы бесконечной. Наконец, средняя плотность планеты определяется в этом случае равенством:

$$\Delta = \frac{3\rho_1}{n+3}$$

Для Земли это дает $\Delta = \frac{8.16}{1.96} = 4.16$; однако такой результат совершенно не удовлетворителен, так как для Земли твердо установлено значение $\Delta = 5.52$; таким образом, закон Клеро — Дарвина не выдерживает контроля через среднюю плотность Земли. К тому же, геофизически этот закон мало правдоподобен, так как дает бесконечные плотности и давления в центре. Впрочем, Дж. Дарвин указывал, что и это затруднение можно обойти, допустив существование в центре планеты т в е р д о г о ядра с произвольно малым радиусом r_0 и п о с т о я н н о й плотностью:

$$\rho_0 = \frac{3}{n+3} r_0{}^n$$

Масса этого ядра будет, очевидно:

$$M = \frac{4\pi}{n+3} r_0{}^{n+3}$$

т. е. сколь угодно мала.

73 (стр. 178). К § 60. **Вторая форма теоремы Клеро.** Здесь выводится граничное условие, которому должна удовлетворять функция, выражающая сжатие слоев на границе жидкой массы. Это граничное условие получается проще всего из уравнения (II) прим. 70:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{d\alpha}{dr}+\frac{2\alpha}{r^3}\right)\int\limits_0^r \rho r^2\,dr=\int\limits_r^1 \rho\,d\alpha+\frac{5}{2}A\varphi$$

Очевидно, при $r \to 1$, интеграл в левой части превратится в A, и мы получим:

$$\left(r\frac{d\alpha}{dr}+2\alpha\right)_{r=1}=\frac{5}{2}\varphi \qquad (1)$$

Клеро замечает, что если в выражение α войдет произвольная постоянная, то определение ее из этого уравнения проще, чем посредством подстановок выражений ρ и α в основное уравнение § 55.

И действительно, если обратиться, для примера, к закону Клеро — Дарвина, где мы имели:

$$\alpha=c_1 r^{m_1}$$

то, применяя (1), немедленно получим:

$$c_1(m_1+2)=\frac{5}{2}\varphi$$

отсюда, учитывая выражение m_1, найдем:

$$e_1\left(q-n-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}\varphi$$

т. е. то же самое выражение для c_1, что и в прим. 72 (формула 3).

В уравнение (2) можно ввести переменную η (см. прим. 71); обозначая значение этого параметра на внешней поверхности через η_1, имеем:

$$\eta_1=\left(\frac{r}{\alpha}\frac{d\alpha}{dr}\right)_{r=1}$$

Поэтому, вместо (1), получаем теперь (учитывая, что граничное значение α есть δ, т. е. сжатие внешней поверхности):

$$\eta_1=\frac{5}{2}\frac{\varphi}{\delta}-2 \qquad (2)$$

откуда

$$\delta = \frac{5\varphi}{4\left(1 + \frac{\eta_1}{2}\right)} \tag{3}$$

Зависимости (1) или (2) и (3) носят такой же характер „стоксовых формул“, как и основная теорема Клеро (§ 49, прим. 66): они имеют место, каков бы ни был закон распределения плотностей внутрн сфероида. Более того, легко показать, что они представляют собой только другую форму теоремы Клеро. В самом деле, по этой теореме:

$$\beta + \delta = \frac{5}{2}\varphi \tag{4}$$

Поэтому, сопоставляя с (1) и замечая, что граничное $\alpha_1 = \delta$, найдем:

$$\beta = \left(r\frac{d\alpha}{dr}\right)_{r=1} + \delta$$

Вместо этого можем написать:

$$\beta = \left[\frac{d}{dr}(r\alpha)\right]_{r=1}$$

Это равенство дает новое по виду определение „коэффициента Клеро“. В действительности же оно совпадает, как мы сейчас покажем, с исходным определением этого коэффициента (см. прим. 66):

$$\beta = \frac{g_1 - g_0}{g_0}$$

Для доказательства рассмотрим, наряду с данным сфероидом, полуоси которого a и b, другой сфероид, концентрический с первым, с полуосями $a + da$ и $b + db$; очевидно, мы можем рассматривать da и db как расстояния между бесконечно близкими поверхностями уровня по нормалям, на экваторе и на полюсе; поэтому, в силу теоремы, доказанной в § 21 части первой (прим. 19), можем написать:

$$g_0\,da = g_1\,db$$

и следовательно:

$$\beta = \frac{da - db}{db}$$

но

$$a - b = b\alpha$$

поэтому

$$\beta = \frac{d(b\alpha)}{db}$$

это равенство, с точностью до бесконечно малых высших порядков, эквивалентно формуле (4). Таким образом, приходим к интересному результату.

Теорема Клеро (§ 49), приведенная к виду:

$$\left[\alpha + \frac{d(r\alpha)}{dr}\right]_{r=1} = \frac{5}{2}\varphi$$

представляет собой не что иное, как граничное условие, которому должна удовлетворять функция $\alpha(r)$ на внешней поверхности, — условие, являющееся следствием общего уравнения равновесия всех слоев жидкой массы (§ 55).

74 (стр. 181). К § 61. Чтение этого параграфа, где Клеро рассматривает случай стратификации жидкости в виде конечного числа слоев конечной толщины, затрудняется только архаизмом применяемых здесь обозначений; авторы XVIII в. не имели в своем распоряжении подстрочных индексов; поэтому ряд последовательных значений какой-либо величины обозначается у них соответствующими буквами в а л ф а в и т н о м порядке; при наличии в формулах величин нескольких видов применялись равные алфавиты, отчего формулы, разумеется, становились мало наглядными. Мы перепишем содержание этого параграфа в более удобных обозначениях. Пусть будут

$r_1, r_2, \ldots \ldots \ldots r_n$ — полуоси слоев; $(r_0 = 0)$;
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots \ldots \alpha_n$ — их сжатия;
$\rho_1, \rho_2, \ldots \ldots \ldots \rho_n$ — плотности;

положим сверх этого

$$\rho_s - \rho_{s+1} = q_s; \quad s = 1, 2, \ldots . (n-1),$$

считая, что все $q_s > 0$ по условию.

В основное уравнение § 55, написанное для слоя с номером p (где $1 \leqslant p \leqslant n$), войдут следующие величины:

1) Вместо интеграла $\int \rho r^2\, dr$ теперь будет:

$$A_p = \frac{1}{3}\sum_1^p \rho_k (r_k^3 - r_{k-1}^3) = \frac{1}{3}\sum_1^{p-1} r_k^3 q_k + \frac{1}{3} r_n^3 \rho_r$$

Соответственно этому:

$$\frac{5}{2}\varphi A = \frac{5}{2}\frac{A_n}{r_n^3}$$

так как радиус внешнего слоя вместо 1 теперь равен r_n.

2) Вместо интеграла $\int\limits_r^1 \rho\, d\alpha$ будем иметь сумму:

$$\sum_{p+1}^{n} \rho_k (\alpha_k - \alpha_{k-1}) = \sum_{p+1}^{n} \alpha_k q_k - \alpha_p \rho_{p+1} + \alpha_n \rho_n$$

3) Вместо интеграла $\int\limits_0^r \rho d(r^5 \alpha)$ получим теперь:

$$\sum_{1}^{p} \rho_k (r_k^5 \alpha_k - r_{k-1}^5 \alpha_{k-1}) = \sum_{1}^{p-1} r_k^5 \alpha_k q_k + r_p^5 \alpha_p \rho_p$$

Поэтому основное уравнение § 55 для p-го слоя примет теперь вид:

$$\frac{5\alpha_p A_p}{r_p^3} = \frac{5}{2} \varphi \frac{A_n}{r_n^3} + \frac{1}{r_p^5} \sum_{1}^{p-1} r_k^5 \alpha_k q_k + \sum_{p}^{n-1} \alpha_k q_k + \alpha_n \rho_n \tag{1}$$

Если составить соответствующее уравнение для $(p-1)$-го слоя и вычесть из только что написанного уравнения, то получим:

$$\frac{5\alpha_p A_p}{r_p^3} = \frac{5\alpha_{p-1} A_{p-1}}{r_{p-1}^3} - \alpha_{p-1} q_{p-1} \left(1 - \frac{r_{p-1}^5}{r_p^5}\right) + \\ + \left(\frac{1}{r_p^5} - \frac{1}{r_{p-1}^5}\right) \sum_{1}^{p-2} r_k^5 \alpha_k q_k \tag{2}$$

Применим, как это делает Клеро, это общее уравнение (§ 61) к случаю двух слоев с плотностями ρ_1 и ρ_2, положив, как выше $\rho_1 - \rho_2 = q_1$, и введя еще для удобства отношение полуосей:

$$\frac{r_1}{r_2} = \lambda_1$$

В уравнении (2) последняя сумма теперь исчезает, и мы получим:

$$\frac{5\alpha_2 A_2}{r_2^3} = \frac{5\alpha_1 A_1}{r_1^3} - \alpha_1 q_1 (1 - \lambda_1^5) \tag{3}$$

но

$$A_1 = \frac{1}{3} \rho_1 r_1^3$$

$$A_2 = \frac{1}{3} [\rho_1 r_1^3 + \rho_2 (r_2^3 - r_1^3)] =$$

$$= \frac{1}{3} r_2^3 (\rho_2 + q_1 \lambda_1^3)$$

и уравнение (3) после простых приведений даст нам:

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{5} \frac{2\rho_1 + 3\rho_2 + 3q_1 \lambda_1^5}{\rho_2 + q_1 \lambda_1^3} \tag{4}$$

Для контроля выведем эту же формулу из совершенно иных соображений.

Обозначим через $D(r)$ среднюю плотность неоднородной массы, занимающей сфероидический объем среднего радиуса r; в условиях задачи Клеро этот объем можно принять в точности за сферу радиуса r; тогда

$$D(r) = \frac{3}{r^3} \int_0^r \rho r^2\, dr = \frac{3A(r)}{r^3} \tag{5}$$

Не представляет труда показать, что из „производного уравнения" Клеро (уравнение III, прим. 71) следует весьма важная формула:

$$\frac{d}{dr}[D(r)\alpha] = \frac{3}{r^6} \int_0^r r^5 \alpha \frac{d\rho}{dr}\, dr \tag{6}$$

Применяя ее к внутреннему объему радиуса r_1 с постоянной плотностью ρ_1, имеем:

$$D(r_1) = \rho_1$$

Рассмотрим теперь объем, ограниченный радиусом r_2; для него

$$D(r_2) = \frac{1}{r_2^3}[\rho_1 r_1^3 + \rho_2 (r_2^3 - r_1^3)] = \rho_2 + q_1 \lambda_1^3 \tag{7}$$

где, как выше,

$$q_1 = \rho_1 - \rho_2 \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \frac{r_1}{r_2}$$

Далее, здесь

$$\frac{3}{r^6} \int_0^r r^5 \alpha \rho'\, dr = \frac{3}{r_2^6} r_1^5 \alpha_1 (\rho_2 - \rho_1),$$

так как только один элемент интеграла при $r = r_1$ дает скачок плотности $d\rho = \rho_2 - \rho_1$. Поэтому формула (6) после интегрирования по r_2 дает:

$$D(r_2)\alpha_2 = \frac{3}{5} \lambda_1^5 \alpha_1 q_1 + C;$$

определяя произвольную постоянную из условия, что при $\lambda_1 = 1$ слева должно получиться $\rho_1 \alpha_1$, найдем:

$$D(r_2)\alpha_2 = \rho_1 \alpha_1 + \frac{3}{5} \alpha_1 q_1 (\lambda_1^5 - 1) \tag{8}$$

Подставляя выражение $D(r_2)$ из (7), получим:

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{5} \cdot \frac{5\rho_1 - 3q_1 + 3q_1 \lambda_1^5}{\rho_2 + q_1 \lambda_1^3} \qquad (9)$$

что, очевидно, тождественно с (4) и дает полный контроль этой формулы.

Несколько ниже, в конце § 63, Клеро пишет ту же формулу иначе, а именно, в наших обозначениях:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1 = \frac{(2 + 3\lambda_1^5 - 5\lambda^3{}_1)\, q_1}{5(\rho_2 + q_1 \lambda_1^3)} \qquad (10)$$

Поскольку здесь $\lambda_1 < 1$ и все прочие величины, включая q_1, положительны, легко видеть, что

$$\alpha_2 > \alpha_1$$

иными словами: сжатие оболочки с ее внешней стороны больше, чем с внутренней, прилегающей к жидкому ядру. Это является частным случаем весьма важной теоремы, которую Клеро доказывает в следующем параграфе.

Отметим здесь же, что Клеро развивает формулы для сжатий слоев конечной толщины, исходя из основного уравнения § 52, где толщина их предполагалась бесконечно малой. Но можно итти и обратным путем и устанавливать первоначально условие равновесия однородного конечного слоя и затем предельным переходом выводить основное уравнение Клеро. Этот метод применил французский астроном Ами* в весьма важной диссертации по теории фигуры планет.

75 (стр. 182). К § 62. Это замечание Клеро вызвано тем обстоятельством, что в уравнение (2) прим. 74 не входит ни одна величина, индекс которой был бы больше p.

76 (стр. 182). К § 63. Теорема, доказанная в этом параграфе, имеет большое и принципиальное значение: наслоение неоднородной жидкости (ее стратификации) не может состоять из подобных эллипсоидов, т. е. эллипсоидов, обладающих о д и н а к о в ы м (и, как здесь предполагается, весьма малым) сжатием: такие фигуры возможны только для жидкости однородной. Но у сфероидов Клеро сжатия слоев идут, увеличиваясь от центра к поверхности. Эту теорему легко доказать в общем виде, допуская непрерывность наслоения и исходя из основного уравнения § 55 (для этого доказательства существенно лишь предположение, что плотность непрерывно уменьшается от центра к поверхности); Клеро доказывает здесь эту теорему только для случая конечного числа однородных слоев, со скачкообразным падением плотности при переходе от одного слоя к следующему, по направлению

* M. H a m y. Étude sur la figure des corps célestes. Ann. Obs. de Paris, XIX. 1887; Journ. des Mathém., 1890.

к внешней поверхности. Его доказательство основано на весьма искусном преобразовании уравнения (2) прим. 74. Мы воспользуемся для этого уже введенными обозначениями.

Положим, для сокращения письма:

$$\frac{5A_p}{r_p{}^3} = Q_p$$

$\left(\right.$у **Клеро это множитель** $\left.\frac{5[N]}{n^3}\right)$, **и преобразуем указанное уравнение к виду:**

$$\frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p} - 1 = 5Q_p\left(\frac{A_{p-1}}{r_{p-1}^3} - \frac{A_p}{r_p^3}\right) + Q_p\, q_{p-1}\left(\frac{r_{p-1}^5}{r_p^5} - 1\right) +$$

$$+ Q_p\left(\frac{1}{r_p^5} - \frac{1}{r_{p-1}^5}\right)\cdot\sum_1^{p-2} r_k^5 \frac{\alpha_k}{\alpha_{p-1}} q_k$$

Но, **учитывая выражения величин** A_k, **данные в прим. 74, получим:**

$$\frac{A_{p-1}}{r_{p-1}^3} - \frac{A_p}{r_p^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{r_{p-1}^3} - \frac{1}{r_p^3}\right)\sum_1^{p-1} r_k^3 q_k$$

Таким образом,

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} - 1 = \frac{5}{3} Q_p\left(\frac{1}{r_{p-1}^3} - \frac{1}{r_p^3}\right)\sum_1^{p-1} r_k^3 q_k +$$

$$+ Q_p\, q_{p-1}\, r_{p-1}^5\left(\frac{1}{r_p^5} - \frac{1}{r_{p-1}^5}\right) + Q_p\left(\frac{1}{r_p^5} - \frac{1}{r_{p-1}^5}\right)\sum_1^{p-2} r_k^5 \frac{\alpha_k}{\alpha_{p-1}} q_k$$

Делая приведение по множителям $q_{p-1}, q_{p-2}, q_{p-3}\ldots$, **получим:**

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} - 1 = Q_p\, q_{p-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{3}\lambda_1{}^3 + \lambda_1{}^5\right) +$$

$$+ Q_p\, q_{p-2}\left[\frac{5}{3}(\lambda_2{}^3 - \lambda_3{}^3) + \frac{\alpha_{p-2}}{\alpha_{p-1}}(\lambda_3^5 - \lambda_2^5)\right] +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

где, для сокращения, мы положили:

$$\lambda_1 = \frac{r_{p-1}}{r_p}\,;\quad \lambda_2 = \frac{r_{p-2}}{r_{p-1}}\,;\quad \lambda_3 = \lambda_1\lambda_2 = \frac{r_{p-2}}{r_p}$$

так что

$$0 < \lambda_1 < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \lambda_3 < \lambda_2 < 1$$

Заметим, что при переходе к следующим коэффициентам $q_{p-3}, q_{p-4} \ldots$ будет достаточно заменить r_{p-2} на r_{p-3}, r_{p-4} и т. д., а также α_{p-2} на $\alpha_{p-3}, \alpha_{p-4} \ldots$, не меняя знаменателей написанных дробей.

Таким образом, коэффициент при $\frac{1}{3} Q_p q_{p-1}$ есть

$$2 + 3\lambda_1^5 - 5\lambda_1^3$$

Этот коэффициент положителен при всех допустимых значениях λ_1.

Коэффициент при $\frac{1}{3} Q_p q_{p-2}$ есть

$$\left(3\frac{\alpha_{p-2}}{\alpha_{p-1}}\lambda_3^5 - 5\lambda_3^3\right) - \left(3\frac{\alpha_{p-2}}{\alpha_{p-1}}\lambda_2^5 - 5\lambda_2^3\right)$$

Здесь каждая из скобок имеет отрицательное значение, если допустить, как это принимает Клеро, что $\alpha_{p-2} < \alpha_{p-1}$; при возрастании аргумента каждая из них убывает (что обнаруживается, если взять производную); а так как $\lambda_2 > \lambda_3$, то разность обеих скобок положительна. Учитывая, наконец, что Q_p, так же как и $q_{p-1}, q_{p-2} \ldots$ величины положительные, по допущению, мы видим, что $\alpha_{p-1} < \alpha_p$; продолжая эти вычисления, найдем, что $\alpha_2 < \alpha_3 \ldots < \alpha_{p-1} < \alpha_p$; наконец, как уже показано в прим. 74, $\alpha_1 < \alpha_2$; следовательно, сжатие слоев возрастает от центра к поверхности, и теорема доказана.

77 (стр. 183). К § 64. В случае, если сфероид состоит из жидкого ядра и жидкой оболочки, задача состоит в том, чтобы по заданным плотностям ρ_1 и ρ_2 и радиусам r_1 и r_2 определить сжатия α_1 и α_2. Одно уравнение, связывающее обе эти величины, уже дано в § 61; в наших обозначениях [см. прим. 74, формула (9), где надо положить $\rho_1 = \rho_2 + q_1$]

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{5} \frac{3\rho_2 + 2\rho_1 + 3q_1\lambda_1^5}{\rho_2 + q_1\lambda_1^3} \tag{1}$$

Для получения второго уравнения между α_2 и α_1 необходимо, как это указывает Клеро в конце § 61, применить уравнение (1) прим. 74 либо к границе первого слоя со вторым, либо к внешней границе второго. Но мы возьмем и то и другое, полагая в первом случае $p = 1$, $n = 2$, во втором

$p=2$ и $n=2$. Подставляя в это уравнение выражения A_1 и A_2, данные в прим. 74, получаем два уравнения:

$$\frac{5}{3}\alpha_1\rho_1 = \frac{5}{6}\varphi(\rho_2+q_1\lambda_1^3)+\alpha_1 q_1+\alpha_2\rho_2$$

$$\frac{5}{3}\alpha_2(\rho_2+q_1\lambda_1^3) = \frac{5}{6}\varphi(\rho_2+q_1\lambda_1^3)+\alpha_1 q_1\lambda_1^5+\alpha_2\rho_2$$

Вычитая из верхнего уравнения нижнее, получаем снова после приведений уравнение (1); в этом и состоит прием, которым пользуется Клеро в § 61. Решая оба последние уравнения, находим после упрощений:

$$\alpha_1 = \frac{25\varphi(\rho_2+q_1\lambda_1^3)^2}{(10\rho_2+4q_1)(2\rho_2+5q_1\lambda_1^3)-18\rho_2 q_1\lambda_1^5}$$

$$\alpha_2 = \frac{5\varphi(\rho_2+q_1\lambda_1^3)(5\rho_2+2q_1+3q_1\lambda_1^5)}{(10\rho_2+4q_1)(2\rho_2+5q_1\lambda_1^3)-18\rho_2 q_1\lambda_1^5}$$

В обозначениях Клеро:

$$r_2=1;\quad \rho_2=1;\quad q_1=a;\quad \lambda_1=a$$

$$\beta=\alpha_2\quad \alpha=\alpha_1$$

что и дает формулы § 64.

78 (стр. 184). К § 65. Теорема Клеро о пределах сжатия. Как уже было указано в прим. 61 к § 38, сжатие внешней поверхности сфероида существенным образом зависит от закона изменения сжатия слоев во всем его объеме. В случае если плотность непрерывно убывает от центра к поверхности (как это всегда предполагает Клеро), сжатия слоев непрерывно возрастают в том же направлении, следовательно, $\eta_1>0$, и потому из формулы (3) прим. 73 следует, что

$$\delta=\frac{5\varphi}{4\left(1+\frac{\eta_1}{2}\right)}<\frac{5}{4}\varphi$$

Далее, нетрудно доказать, что при всяком законе распределения плотностей $\eta<3$; поэтому при всех условиях $\delta>\frac{\varphi}{2}$. Далее, по теореме Клеро, $\delta+\beta=\frac{5}{2}\varphi$; таким образом, при любом законе распределения плотностей внутри неоднородной планеты имеет место следующий ряд неравенств, определяющих границы сжатия и „коэффициента Клеро":

$$\frac{\varphi}{2}<\delta<\frac{5}{4}\varphi<\beta<2\varphi$$

В „случае Гюйгенса“ (концентрация всей массы в области центра) оба крайних неравенства заменяются равенствами; в „случае Ньютона“ оба средних переходят в равенства. Таким образом, этот результат является следствием „теоремы Клеро“, написанной в ее „обычной“ и „второй“ формах (§ 49, прим. 66 и § 60, прим. 73), а также теоремы о возрастании сжатий от центра к поверхности (§ 63, прим. 76); он есть один из прекраснейших выводов из теории Клеро; разумеется, ссылка на § 38, которую Клеро вводит в свое доказательство, совершенно ненужна, как это было выяснено в прим. 61.

79 (стр. 188). К § 69. Земной сфероид. Основным критерием правильности теории Клеро могло явиться фактическое измерение сжатия δ и коэффициента β на земной поверхности.* Для сжатия эта теория давала совершенно определенную верхнюю границу, именно

$$\delta < \frac{1}{230}$$

Подтверждения этого условия естественно было ожидать от работ первой экспедиции, направленной в далекие от Франции края для измерения градуса меридиана. Но случилось так, что лапландская экспедиция, установив неоспоримо самый факт сжатия Земли, на долгие десятилетия внесла существенное осложнение в вопрос о величине этого сжатия. Как уже было упомянуто (стр. 233), результат ее работ был тот, что под широтой Торнео ($\varphi = 66^\circ 20'$) длина градуса меридиана $d_1 = 57\,438$ туаз; ее и надлежало теперь сопоставить с первым французским градусным измерением (Пикар, 1671), которое на средней широте $\varphi = 49^\circ 25'$ дало длину градуса $d = 57060$ туаз.**

Для того чтобы из этих данных получить величину сжатия, можно воспользоваться формулой, которую Мопертюи дал в своей отчетной книге о лапландской экспедиции и которая гласит:***

$$\delta = \frac{d_1 - d}{3d_1} \frac{1}{(\sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi)}$$

---

* Современные данные приведены в прим. 61.

** Как выяснилось несколько позднее, результат Пикара обладал высокой точностью (порядка 20 м), однако лишь в силу того случайного обстоятельства, что геодезические и астрономические ошибки его триангуляции взаимно скомпенсировались.

*** Figure de la terre etc. (1738), p. 127; формула Мопертюи точна только до первой степени сжатия; ее легко вывести из более строгой зависимости, которая приведена, например, в цитированном сочинении Гаусса (Тр. академика А. Н. Крылова, т. VI, стр. 387).

Однако, если подставить в эту формулу только что приведенные данные для лапландской и французской дуги меридиана, то получится:

$$\delta = 1/119.4$$

т. е. значение, вдвое большее, чем сжатие однородной „ньютоновой" Земли! Разумеется, участникам лапландской экспедиции это было прекрасно известно; так, Клеро в одной работе, написанной и изданной после возвращения из Лапландии, но до выхода книги по теории фигуры Земли, приводил некоторый численный пример для эллипсоида со сжатием порядка $^1/_{100}$ и говорил, что это не намного отличается от сжатия, полученного для Земли после работ у Полярного круга;* известно также, что и Мопертюи не был доволен результатами и „предполагал возобновить измерения на свой собственный счет".** Однако этого не сделали, но решили произвести новые астрономические наблюдения в точках старинной триангуляции Пикара; в этой работе, выполненной в конце 1739 г., участвовали сам Мопертюи и его спутники в Лапландии, и результат ее, — фактически совершенно неправильный, — был тот, что старое определение длины градуса меридиана во Франции нужно увеличить на 123 туаза.

В силу этого разность $d_1 - d$ (которой сжатие по формуле Мопертюи прямо пропорционально) уменьшалась с 378 до 225 туазов, и соответственно этому теперь получалось:

$$\delta = \frac{1}{119.4} \cdot \frac{255}{378} = \frac{1}{177.1}$$

Это и есть та злосчастная величина сжатия, которую Клеро приводит в § 69; она была принята во Франции в 1740-х годах, и с нею считался не только Клеро, но и Даламбер в трактате о „Предварении равноденствий", и маркиза дю-Шатлэ в ее Комментарии к переводу ньютоновых „Начал". Полная неясность в вопросе о величине сжатия только увеличивалась в течение ближайших десятилетий, по мере накопления новых измерений. Так, Даламбер, в 1756 г. считал невозможным найти такую величину сжатия, с которой можно было бы согласовать длину градуса меридиана в Лапландии, Франции, Перу, на мысе Доброй Надежды и в Италии (Recherches sur différents points importants du Système du Monde, vol. III, Préface), а Лаплас, во II томе „Небесной механики" приходил к выводу, что совокупность всех градусных измерений не позволяет считать земные

* Clairaut. Suite d'un mémoire, donné en 1733, qui a pour titre. détermination géometrique de la perpendiculaire à la méridienne. Mém. Ac. Sc. Paris pour 1739, publ. 1741.

** Lalande. Bibliographie Astronomique, p, 811 (цит. по Todhunter, op. cit., vol. I, p. 101).

меридианы эллипсами, если только не допустить в лапландской триангуляции ошибку в 172.5 туаза, т. е. 336 м; (Laplace, Méc. Celeste, livre III, § 40). В действительности, как это выяснилось после шведской триангуляции Сванберга (1801), эта ошибка составляла больше 400 м.

Как мы видим, „исправленное" сжатие шло вразрез теории Клеро, так что можно только удивляться той спокойной уверенности и научному мужеству, которое он проявил, утверждая в конце § 69, что если величина сжатия будет установлена вне пределов, назначаемых его теорией, то это будет равносильно опровержению закона всемирного тяготения в приложении к теории фигуры планет. Однако и закон Ньютона и теория Клеро выдержали это испытание.

80 (стр. 189). К § 70. В заключение своей книги Клеро возвращается к вопросу о сжатии Юпитера; в § 22 (см. прим. 47) было установлено, что отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе Юпитера, т. е. параметр φ, имеет значение

$$\varphi \doteq \frac{1}{11.615}$$

отсюда, по теореме о пределах сжатия (§ 65), Клеро заключает, что сжатие Юпитера должно заключаться между значениями:

$$\delta_1 = \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{23.2} \quad \text{и} \quad \delta_2 = \frac{5}{4}\varphi = \frac{1}{9.29}$$

Наблюдаемая величина сжатия этой планеты лежит внутри полученных пределов, и это говорит, конечно, в пользу теории Клеро; здесь нужно, однако, сделать оговорку, что сжатие Юпитера ($^1/_{15}$) в 20 раз больше сжатия Земли, а параметр φ в 24 раза превосходит его значение для Земли; таким образом, квадраты этих параметров для Юпитера имеют тот же порядок, как их первые степени для Земли. Поэтому „приближение Клеро", в котором квадраты δ и φ систематически отбрасываются, для Юпитера уже недостаточно. Однако и во втором приближении здесь удалось согласовать теорию с наблюдениями.*

F. ПРИМЕЧАНИЯ К МЕМУАРАМ ДАЛАМБЕРА

81 (стр. 193). Выдержка из мемуара „Sur l'équilibre des Fluides" (Opusc. Mathém., vol. V, 1768, p. 1—131) может служить превосходным примером того стиля „математической полемики", который столь характерен для этого знаменитейшего представителя французской культуры — в самом широком смысле этого слова — во второй половине XVIII в. В данном

* Wavre. Figures planétaires et Géodésie (1932), p. 128—132.

случае эта полемика направлена против VIII главы первой части книги Клеро; она содержит существенные замечания относительно пределов применения правила Клеро о полном дифференциале „элементарного усилия“ как условия равновесия жидкостей. Здесь Даламбер вполне отчетливо вскрывает причину тех „парадоксов“, с которыми столкнулся Клеро, особенно в тех примерах, где он пользуется полярными координатами (см. §§ 40—45 первой части и прим. 25—28).

Из всего содержания этого мемуара (40 стр. in 4°) мы выделяем для перевода только пункты 18—30, имеющие прямое отношение к книге Клеро. При транскрипции формул совершенно необычные теперь обозначения: y для радиуса-вектора и x для полярного угла заменены на r и θ; для радиальной составляющей силы принято обозначение R, для трансверсальной T; через $-f(r)$ обозначается центробежная сила на расстоянии r от оси вращения.

82 (стр. 193). К п. 18. Как уже было упомянуто в прим. 32, Даламбер в одной из ранних работ, именно в §§ 85 и 86 „Рассуждения об общей причине ветров“ (Reflexions sur la cause générale des Vents, 1747), высказал то положение, что для неоднородной жидкости поверхности постоянной плотности не совпадают с уровенными; поэтому на поверхностях $\rho = \text{const}$ тангенциальная составляющая силы может и не обращаться в нуль (в п. 18 Даламбер называет эту составляющую „горизонтальной“, а нормальную — „вертикальной“). Но позднее, после замечаний Лагранжа, Даламбер признал, что для случая „сил природы“, иными словами, для сил, действующих по закону всемирного тяготения, его утверждение места не имеет. По этому вопросу см. классические страницы в „Аналитической механике“ Лагранжа (перев., стр. 149—150).

В письме от 15 ноября 1762 г. Даламбер пишет Лагранжу: „Вы совершенно правы в отношении слоев Земли, которые в системе притяжения должны быть уровенными“ (Oeuvres de Lagrange, vol. XIII, p. 8); о том же говорил он в 1768 г. на первых страницах того мемуара о „Равновесии жидкостей“ (Opusc. Mathém., vol. V, p. 2—5), выдержки из которого здесь приводятся. Однако в 1770 г., во втором издании „Traité de l'équilibre et du mouvement des Fluides“ (p. 90), Даламбер снова возражал Клеро и писал про него: „Впрочем, я считаю, что этот ученый ошибся, когда он утверждал, что в неоднородной жидкости все слои различных плотностей должны быть уровенными... Правда, я и сам здесь ошибся, полагая, что в системе притяжения слои Земли могут не быть уровенными. На это обратил внимание знаменитый Лагранж во 2-м томе Туринских мемуаров. Тем не менее, верно то, что при большом числе гипотез [т. е. предположений о законах действия сил] жидкость может быть в равновесии, хотя частицы с одинаковой плотностью и не обязательно будут находиться на уровенной поверхности“.

Позиция Даламбера в этом вопросе правильна, хотя он и не дал ей законченную механическую формулировку. Как хорошо известно, для равновесия неоднородной жидкости необходимо и достаточно, чтобы в каждой ее точке вектор действующей объемной силы был перпендикулярен к вектору-вихрю жидкости, т. е. чтобы проекции силы X, Y, Z в каждой точке жидкости удовлетворяли равенству:

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)+Z\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=0$$

Из этого условия отнюдь не вытекает, что поверхности постоянного давления должны совпадать с поверхностями постоянной плотности. Однако, если допустить, что действующие силы имеют потенциал, то приведенное условие выполняется тождественно во всех точках жидкой массы, и тогда поверхности постоянной плотности, постоянного давления и постоянного значения потенциала совпадают [прим. 32]. По этим вопросам см.: Appell, Traité de Méc. Rationelle, éd. 1928, vol. III, §§ 541 и 626.

83 (стр. 195). К п. 20. Даламбер во всем этом мемуаре 1768 г. не пользуется понятием гидростатического давления, хотя оно было уже введено Эйлером (Principes généraux du mouvement des Fluides, Mém. Ac. Berlin, 1755); тем не менее мысль Даламбера здесь вполне ясна: допустим, что, применяя полярные координаты, мы получили бы $p=F(r, \theta)$; тогда, если $F(0, \theta)$ не приводится к постоянной, то давление вокруг начала координат не было бы одинаково в различных направлениях, что противоречит свойствам жидкостей; это Даламбер и обозначает здесь словом „choquant".

84 (стр. 196). К п. 22. Напоминаем, что под термином „вес" канала Даламбер, так же как Ньютон и Клеро, понимает работу действующей объемной силы по длине канала (см. Вводные замечания, I). Когда ниже будет итти речь о „весе канала" в ту или другую сторону, то это будет означать лишь, что работа силы считается алгебраически и меняет знак при изменении направления ее действия на обратное.

85 (стр. 197). К п. 23—24. Здесь Даламбер выясняет невозможность равновесия жидкой массы, когда силовая функция U многозначна, например зависит только от полярного угла θ. Этот пример его перешел во все последующие трактаты по гидростатике; формулировка его требует, однако, оговорок и рассмотрения различных расположений жидкой массы относительно оси ее возможного вращения (см.: Appell, loc. cit., § 638).

86 (стр. 197). К п. 25. Этот несколько неясный тезис мы можем понять только в том смысле, что интеграл от элементарного давления не должен заключать „циклических постоянных", хотя и не очевидно, что Даламбер владел понятием многосвязных областей.

87 (стр. 198). К п. 26. Даламбер ставит здесь два условия для трансверсальной составляющей действующей силы:

1) $$\int_0^{2\pi} Tr\,d\theta = 0$$

и 2) функция T должна быть периодической с периодом 2π. Второе условие, очевидно, может иметь место без того, чтобы соблюдалось первое. Например, говорит Даламбер, если возьмем кривую $y = f(x)$ типа циклоиды и положим:

$$y = T, \quad x = \int r\,d\theta$$

то

$$\int y\,dx = \int_0^{2\pi} Tr\,d\theta$$

Этот интеграл, очевидно, отличен от нуля; если же возьмем кривую типа синусоиды и положим:

$$y = rT, \quad x = \alpha \int d\theta, \quad \alpha = \text{const},$$

то

$$\int y\,dx = \alpha \int_0^{2\pi} Tr\,d\theta = 0$$

и оба условия удовлетворены (во втором случае Даламбер пишет $y = T$, но тогда его пример нам непонятен).

88 (стр. 199). К п. 28. В полярных координатах дифференциал давления приводится к форме:

$$dp = R\,dr + Tr\,d\theta$$

Интегрируя по радиусу от любой точки r_0, θ_0 до точки r_1, θ_0 при постоянном θ, получим:

$$p - p_0 = \int_{r_0}^{r} R\,dr$$

но так как dp есть полный дифференциал, то

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{r_0}^{r} R\,dr = Tr$$

как и утверждает здесь Даламбер.

89 (стр. 200). К п. 30. Даламбер рассматривает здесь первые два примера, данные Клеро в § 45 первой части (прим. 23). Силовая функция для тех примеров, которые он сам предлагает, есть

$$U = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad \text{или} \quad U = 2\sqrt{\alpha^2 + r \sin \theta}$$

она удовлетворяет всем условиям, указанным в п. 28 (стр. 199), т. е. регулярна в начале, не содержит „вековых членов" с θ и без r; поэтому и трансверсальная составляющая T соответствует условиям п. 26.

Дальнейшее содержание мемуара „О равновесии жидкостей" (1768) не имеет непосредственного отношения к „Теории фигуры Земли" Клеро; но приведенные здесь страницы — один из тех редких случаев, когда Даламбер был прав в своей неустанной критике Клеро и где он высказал ряд тонких и интересных для истории науки замечаний. Однако гораздо чаще, — по слову Тодгэнтера, — он выступал с критикой результатов Клеро в „Теории фигуры Земли", „не дав себе труда их предварительно понять".

90 (стр. 201). Содержание этого мемуара Даламбера примыкает непосредственно к §§ 9—14 второй части книги Клеро и заключает весьма глубокий анализ того уравнения относительного равновесия однородных эллипсоидов вращения, которое, если и не было написано, то во всяком случае полностью подготовлено Маклореном в его „Treatise of Fluxions" §§ 655—658. Это исследование Даламбера осталось классическим в теории фигур равновесия однородной вращающейся жидкости; Лаплас ввел его полностью в „Небесную механику" (Méc. Cél., livre III, § 18), исправив при этом одну ошибку Даламбера. Хотя содержание этого мемуара и не относится к теории неоднородных жидких сфероидов Клеро, которая составляет наиболее оригинальную и существенную часть издаваемой книги, — тем не менее мы включили этот перевод в наше издание, как одно из важнейших произведений XVIII в. по теории фигур равновесия, тем более, что у Даламбера здесь впервые возникает и своеобразно решается вопрос об устойчивости этих фигур.

Мемуар Даламбера разделен на 49 пунктов; мы не включили в наш перевод последние 9, так как здесь Даламбер производит вычисления в предположении, что сила притяжения действует по гипотетическому закону:

$$F = \frac{\alpha}{r^2} + \beta r$$

и эти выкладки никакого интереса не представляют.

При транскрипции формул обозначения приведены в соответствии с обозначениями в §§ 9—14 второй части книги Клеро (см. также прим. 3, 38, 42), и старинное написание формул заменено современным.

91 (стр. 202). К п. 1—8. Выражения для сил притяжения однородного эллипсоида вращения на точку на его полюсе и на экваторе даны в §§ 11 и 14 второй части книги Клеро (см. прим. 42), с той разницей, что у Клеро малая полуось b эллипсоида принята за 1. Заметим, что Даламбер принимает второй эксцентриситет эллипсоида l (определенный равенством $b^2 l^2 = a^2 - b^2$) за основной параметр при исследовании равновесных эллипсоидов, соответствующих угловой скорости ω. Тем же параметром l пользуется и Лаплас (Méc. Cél., loc. cit.),

92 (стр. 204) К п. 13. Основное уравнение (B) уже было подготовлено нами (см. прим. 42, уравнение II). Входящий в него параметр φ (отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе) в современных обозначениях есть

$$\varphi = \frac{3\omega^2}{4\pi f \rho}$$

где ω — угловая скорость вращения жидкой массы, f — постоянная закона всемирного тяготения, ρ — плотность жидкости. Уравнение (B) по праву подлежало бы называть уравнением Даламбера; к сожалению, этого не делают ни Лаплас, ни Тиссеран, ни Аппелль. В примечаниях к „Аналитической механике" Лагранжа, Бертран тоже не включает имени Даламбера в историческую справку по теории фигур равновесия (русск. перев., изд. 1938 г., стр. 320).

93 (стр. 208). К п. 14. Под „обоими значениями l" Даламбер понимает корни l_1 и l_2 уравнения (B), п. 13, соответствующие заданному значению угловой скорости ω. Разумеется, для того чтобы по найденному l определить не только отношение обеих полуосей, но каждую из них в отдельности, нужно считать данным еще и объем эллипсоида (плотность его можно всегда принять за 1).

94 (стр. 209). К п. 26. Уравнение (C), стр. 205, есть трансцендентное уравнение для параметра l. Численное решение его методом последовательных приближений обнаруживает, что оно имеет единственный положительный корень:

$$l_0 = 2.5293$$

Этому значению второго эксцентриситета соответствуют следующие значения других параметров (первого эксцентриситета $a^2 e^2 = a^2 - b^2$; первого сжатия $a\alpha = a - b$ и второго сжатия $b\delta = a - b$):

$$e_0 = 0.9299, \quad \alpha_0 = 0.6323, \quad \delta_0 = 1.7200$$

Таким образом, этот эллипсоид,—обычно называемый предельным эллипсоидом Маклорена, — весьма сильно сжат. Подставив полу-

ченное значение l_0 в уравнение (D), стр. 208, найдем, что наибольшее возможное значение параметра φ есть

$$\varphi_0 = 0.33700$$

так что наибольшее возможное значение параметра $\omega^2/2\pi f\rho$ равно

$$\frac{2}{3}\varphi_0 = 0.22467$$

Таким образом, переходим к важной теореме Даламбера: *однородный жидкий эллипсоид может находиться в равновесии, если угловая скорость его вращения не превосходит предельного значения:*

$$\omega_0 = \sqrt{2\pi f\rho \cdot 0.22467}$$

Итак, анализ Даламбера обнаруживает, что всякому значению ω, заданному в пределах $< \omega < \omega_0$, соответствуют два эллипсоида Маклорена с одинаковой массой, но различными эксцентриситетами l_1 и l_2. Но можно показать и более того, именно: при $\omega \to \omega_0$ оба эти эллипсоида, непрерывно изменяясь, приближаются к предельному эллипсоиду E_0 и превращаются в него при $\omega = \omega_0$. По терминологии Пуанкарэ, мы имеем здесь пример двух *линейных*, т. е. зависящих от одного параметра ω, *серий фигур равновесия*; предельный эллипсоид есть „точка разветвления" этих рядов. К тому же, Ляпуновым было доказано, что для $\omega > \omega_0$ не существует не только эллипсоидальных фигур равновесия, но и фигур, которые при малом увеличении скорости мало отличались бы от эллипсоидов.* Напротив, для $\omega < \omega_0$ такие фигуры возможны; изучение их было предметом знаменитых мемуаров Ляпунова и Пуанкарэ; историческим корнем их, как мы видим теперь, необходимо считать небольшой мемуар Даламбера, здесь публикуемый в переводе. Правда, тут следует сделать оговорку: сам Даламбер допускал возможность, что для всякого значения угловой скорости $\omega < \omega_0$ могут существовать не два, но четыре,... и вообще четное число эллипсоидов Маклорена (см. ниже, п. 39), но Лаплас показал, что их существует два, и только два (см. прим. 99).

95 (стр. 210). К п. 27—28. Даламбер несколько раз применяет выражения: столб жидкости „более сильный" (plus forte) или „слабый" (plus faible), по сравнению с другим столбом. Но из формул видно, что при этом он рассматривает давления, производимые в центре массы полярным и экваториальным столбами жидкости одинакового сечения (мы обозначим эти давления через p_1 и p_0); при равновесии, по принципу Ньютона,

---

* *Liapounoff*. Sur un problème de Tchebycheff. Зап. Акад. Наук, 8 серия, XVII, 1905, № 3.

$p_1 = p_0$; но Даламбер решает здесь совершенно новую в ранней истории фигур равновесия задачу: определить бесконечно малое изменение разности $p_1 - p_0$, если фигура равновесия подвергается весьма малой деформации; при этом предполагается, что угловая скорость вращения и объем ее не меняются сверх того (хотя это им и не оговорено), здесь принимается, что деформированная фигура сохранит форму эллипсоида, но только с новым значением эксцентриситета, именно $l_1 + \delta l_1$ или же $l_2 + \delta l_2$, смотря по тому, какой из обоих равновесных эллипсоидов Маклорена, соответствующих заданной угловой скорости ω, здесь рассматривается. Для вывода формул определим давления p_1 и p_0, интегрируя основное соотношение (прим. 38):

$$dp = -\lambda x\, dx - \mu y\, dy + \omega^2 x\, dx$$

сначала по y, от b до 0, считая $x = 0$, затем по x, от $x = a$ до $x = 0$, считая $y = 0$ и предполагая, что на внешней поверхности давление равно нулю, найдем:

$$p_1 = \frac{\mu b^2}{2} = \frac{Pb}{2}$$

$$p_0 = \frac{(\lambda - \omega^2) a^2}{2} = \frac{(E - F) a}{2}$$

где все обозначения соответствуют прим. 38 и 42; подставляя выражения P, E, F, получаем:

$$2(p_1 - p_0) = 2\pi (1 + l^2) \left[\frac{2\varphi}{3} - \frac{(3 + l^2) \operatorname{arc\,tg} l - 3l}{l^3} \right] = F(l) \qquad (1)$$

Если $\varphi < 0.33700$, то правая часть обращается в нуль при $l = l_1$ и при $l = l_2$. Так как для этих значений l выполняется условие равновесия $p_1 - p_0 = 0$, то для бесконечно малых деформаций эллипсоида можем положить, обозначая теперь через δ вариации:

при $l = l_1$:

$$2\delta (p_1 - p_0) = F'(l_1)\, \delta l_1; \qquad F'(l_1) < 0$$

при $l = l_2$:

$$2\delta (p_1 - p_0) = F'(l_2)\, \delta l_2; \qquad F'(l_2) > 0$$

(условие о знаках производной $F'(l)$ легко выясняется, хотя бы на „перевернутых" чертежах Даламбера).

Из приведенных формул и выводится то правило, которым Даламбер пользуется в следующих параграфах: знак вариации $\delta p_1 - \delta p_0$ при $l = l_1$ обратен знаку δl_1; при $l = l_2$ он совпадает со знаком δl_2.

96 (стр. 210). К п. 29—31. На этих страницах мемуара Даламбера впервые вводится понятие устойчивости (или прочности, как раньше говорили) относительного равновесия вращающейся жидкой массы; оно не менее важно для космогонии, чем самое доказательство существования тех или иных фигур. Но трудности, связанные с точной формулировкой критерия устойчивости, а тем более с его применениями, настолько велики, что должно было пройти много десятилетий, прежде чем эта проблема была окончательно обоснована на принципе минимума потенциальной энергии трудами Кельвина, Пуанкарэ, Ляпунова и Джинса. Рассуждения Даламбера здесь, разумеется, слишком просты и вопроса решить не могут; его критерий устойчивости как бы интуитивен и сводится к следующим утверждениям: если бесконечно малая деформация жидкой массы вызывает появление сил, действие которых направлено к восстановлению равновесной конфигурации, то эта конфигурация устойчива; если же эти силы могут только увеличить исходную деформацию, как бы она ни была мала, то равновесие неустойчиво. Первый случай, в общих чертах, соответствует минимуму потенциальной энергии, второй — ее максимуму. Применяя правило, о котором сказано в конце предыдущего примечания, Даламбер при помощи простых и остроумных соображений доказывает, что тот эллипсоид Маклорена E_2, который обладает бо́льшим эксцентриситетом l_2, неустойчив; напротив, эллипсоид E_1 с меньшим эксцентриситетом l_1, соответствующий тому же значению ω, устойчив. Этот первый результат в теории устойчивости фигур равновесия был подтвержден впоследствии. Томсон и Тэт доказали замечательную теорему о том, что при возрастании угловой скорости вращения эллипсоиды Маклорена теряют свою устойчивость, как только ω достигает значения:

$$\omega' = \sqrt{2\pi f \rho \cdot 0.18709} = 0.912\omega_0.$$

Соответствующее значение меньшего корня l_1 уравнения (B), п. 13, есть

$$l_1' = 1.3946$$

Отсюда видно, что предельный эллипсоид E_0 и все эллипсоиды, соответствующие вторым значениям корней l_2 при любых допустимых значениях ω, неустойчивы.*

---

* Thomson and Tait. Natural Philosophy. Эллипсоид E' с эксцентриситетом l_1' есть так называемый критический в линейной серии эллипсоидов Маклорена; он является „точкой ответвления" от нее линейной серии трехосных эллипсоидов Якоби, к которым и переходит устойчивость (теорема Пуанкарэ об „обмене устойчивостями").

97 (стр. 211). К п. 32. В случае предельного эллипсоида E_0 функция $F(l)$ в уравнении (1) прим. 95 проходит через минимум при $l = l_0$; поэтому, обозначая через δl_0 вариацию параметра l от его значения l_0, имеем в этом случае:

$$2\delta(p_1 - p_0) = \frac{1}{2} F''(l_0)(\delta l_0)^2$$

и так как $F''(l_0) > 0$, то $\delta p_1 > \delta p_0$, независимо от знака вариации δl_0; это и приводит Даламбера к положению, которое он называет удивительным или странным (singulier): предельный эллипсоид обладает только ограниченной устойчивостью, относящейся к определенному классу деформаций, именно растяжениям, но не сжатиям.

98 (стр. 214). К п. 38. Даламбер отказывается признать здесь физический смысл за теми предельными значениями, к которым стремятся корни l_1 и l_2 уравнения (В), п. 13, при $\omega \to 0$. Но очевидно, что при $l_1 \to 0$ фигура равновесия делается бесконечно близкой к сфере; при $\omega = 0$ она превращается в сферу. В отношении первой имеет место замечательная о б р а т н а я теорема Лежандра: единственные фигуры равновесия однородной жидкости, бесконечно близкие к сфере, суть сжатые эллипсоиды вращения; сжатие их определяется формулой Ньютона $\delta = \frac{5}{4}\varphi$ (см. П и ц е т т и. Основы механики теории фигур планет, стр. 109—111); в отношении сферы доказано, что она есть е д и н с т в е н н а я фигура равновесия однородной невращающейся жидкости, все частицы которой гравитируют по закону Ньютона; это вытекает из теоремы Ляпунова о том, что из всех тел с данным объемом сфера обладает наименьшей потенциальной энергией тяготения. Что касается второго корня уравнения (В) п. 13, то при $\omega \to 0$, $l_2 \to \infty$, и фигура равновесия при заданной массе представляет собой весьма сжатый эллипсоид, вроде диска очень большого радиуса и малой толщины. При $\omega = 0$ эта фигура исчезает, так как в пределе она обратилась бы в плоскость с толщиной, равной нулю.

99 (стр. 215). К п. 39. Здесь Даламбер и допустил ту ошибку, про которую уже говорилось в прим. 94. Рассмотрим уравнение (В):

$$2\varphi = \frac{(9 + 3l^2)\,\mathrm{arc\,tg}\, l - 9l}{l^3} \qquad (*)$$

Вопреки мнению Даламбера, правая часть его имеет один, и только один, максимум для $l > 0$ [Доказательство можно найти: А п п е л ь. Фигуры равновесия, стр. 51; П и ц е т т и. Основы механики теории фигуры планет, стр. 99—100; Н. Е. Ж у к о в с к и й. Лекции, вып. 7 (Теория притяжения и гидромеханика), стр. 124. — Впервые эта теорема была доказана

Лапласом (Méc. Cél., livre III, § 20); его анализ повторен Пуассоном (Poisson. Cours de Mécanique, vol. II, § 591)]. Мы приведем доказательство Лапласа. Написав предыдущее уравнение (*) в виде:

$$\frac{2\varphi l^3 + 9l}{9 + 3l^2} - \operatorname{arc\,tg} l = 0 \qquad (**)$$

берем производную от его левой части, которую обозначаем через $\psi(l)$; после упрощений найдем:

$$\psi'(l) = \frac{6l^2[\varphi l^4 + (10\varphi - 6)\,l^2 + 9\varphi]}{(3l^2 + 9)^2\,(1 + l^2)}$$

Таким образом, максимумы и минимумы $\psi(l)$ имеют место для значений l, удовлетворяющих биквадратному уравнению:

$$l^4 + \left(10 - \frac{6}{\varphi}\right) l^2 + 9 = 0$$

или, оставляя только положительные значения этого параметра, для

$$l = \sqrt{\left(\frac{3}{\varphi} - 5\right) \pm \sqrt{\left(\frac{3}{\varphi} - 5\right)^2 - 9}}$$

отсюда заключаем, что при $l > 0$ функция $\psi(l)$ может иметь не более одного максимума и одного минимума; поэтому кривая (*) не может пересечь ось абсцисс больше чем в трех точках; но одна из них есть $l = 0$, дающая посторонний корень, если только $\omega \neq 0$; следовательно, уравнение (*) при заданном значении ω не может иметь более двух положительных корней l_1 и l_2. Но в п. 16 показано, что при $\varphi < \varphi_0$ этих корней не может быть меньше двух; следовательно, оно в точности равно двум, если только $\varphi < 0.33700$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Введение 9

Часть первая

Общие принципы для вывода тех условий, при которых жидкости могут находиться в равновесии, и для определения фигуры Земли и других планет, при заданном законе силы тяжести

Глава I. Изложение общего принципа, соблюдение которого необходимо для равновесия жидкостей, с предварительными предложениями о применении этого принципа (§§ 1—8) 27

Глава II. О равновесии жидкости, в которой сила тяготения есть результат действия любого числа сил, из которых каждая притягивает к особому центру (§§ 9—13) 34

Глава III. Исследование закона тяготения, при котором планета никогда не будет иметь постоянную форму, хотя из обоих обычно применяемых принципов и получается одна и та же фигура сфероида (§§ 14—15) 39

Глава IV. Общий способ применения принципа о равновесии каналов любой формы (§§ 16—18) 42

Глава V. Общий принцип, столь же необходимый в приложении к жидкостям, как и начало равновесия любых каналов, и применение этого нового принципа для получения тех же результатов, что и при помощи первого принципа (§§ 19—25) . . . 45

Глава VI. Применение формулы, полученной на основании двух предыдущих принципов, к некоторым частным случаям (§§ 26—32) 51

Стр.

Глава VII. Применение принципа равновесия любых каналов к исследованию законов тяготения, при которых эта сила направлена по перпендикуляру к заданной кривой (§§ 33—40) . . . 57

Глава VIII. Другие способы применения принципа равновесия каналов любой формы при исследовании фигур планет (§§ 41—46) 65

Глава IX. О равновесии жидкости, поверхность которой может иметь форму, отличную от сфероида, образованного вращением кривой около ее оси (§§ 47—54) 73

Глава X. О поднятии или опускании жидкостей в капиллярных трубках (§ 55—65) 79

Глава XI. О равновесии частей планеты, образованной из различных жидкостей, которые, по предположению, не смешиваются друг с другом (§ 66—72) 89

Глава XII. Способ применения современных измерений дуги градуса меридиана и длины секундного маятника для определения закона по которому действует тяготение (§ 73—76) 93

Часть вторая

Определение фигуры Земли и других планет в предположении, что все их частицы взаимно притягиваются с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояний

Предисловие . . . .

Глава I. О фигуре планет в предположении однородности их частей (§ 1—22) 106

Глава II. Определение фигуры жидкой массы, покрывающей твердый сфероид, состоящий из бесконечного множества слоев различной плотности (§ 23—40) 127

Глава III. Способ определения изменений тяжести от экватора к полюсу на сфероиде, состоящем из слоев, плотность и сжатие которых изменяются от центра до поверхности по какому-либо закону (§ 41—53) 148

Стр.

Глава IV. Определение фигуры Земли в предположении, что у нее никогда не было твердых частей и что она состояла из скопления бесконечного множества жидкостей различной плотности (§ 54—67) 165

Глава V. Сравнение предыдущей теории с наблюдениями (§ 68—70) .

Приложения

I. Даламбер. Извлечение из мемуара „О равновесии жидкостей“ (1768) 193

II. Даламбер. О фигуре Земли (1773) 201

III. Два письма Вольтера (1759 и 1765) 217

Н. И. Идельсон. А. Клеро и его „Теория фигуры Земли“ 211

Н. И. Идельсон. Комментарий 260

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР*

*

Технический редактор *Р. С. Певзнер*
Корректор *Н. А. Малевич*
Художественное оформление художника *Н. М. Лобанова*

*

РИСО АН СССР № 2766. Печ. л. 22$^1/_2$ + 4 вклейки.
Учетн.-издат. л. 22. Тираж 5000. МО-06014. Зак № 472.
Подписано к печати 21/VIII 1947 г.

1-я Типография Издательства Академии Наук СССР
Ленинград, В. О., 9 лин., д. 12.

ОПЕЧАТКИ

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
134	15 св.	*CV*	*CX*
146	7 св.	$5q$	$5g$
„	9 „	$\frac{q}{5+q}$	$\frac{g}{5+q}$
172	10 сн.	$3n-6$	$3n+6$
181	3 св.	$5\frac{[M]}{m^2}$	$5\mu\frac{[M]}{m^3}$
205	9 „	$4l\,2/5$	$4l^2/5$
293	1 сн.	g^1	g
336	4 „	$\frac{1}{3}r_p{}^3\rho_r$	$\frac{1}{3}r_p{}^3\rho_p$

Клеро. Фигура Земли.


CLAIRAUT.

THEORIE
DE LA
FIGURE
DE LA TERRE,
Tirée des Principes de l'Hydrostatique.

Par M. CLAIRAUT, de l'Académie Royale des Sciences, & de la Société Royale de Londres.



A PARIS,

Chez DAVID Fils, Libraire, rue Saint-Jacques, à la Plume d'or.

MDCCXLIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Титульный лист первого издания книги Клеро (1743 г.).



DISCOURS

QUI A ETE' LU

DANS L'ASSEMBLE'E

PUBLIQUE

De l'Académie Royale des Sciences,

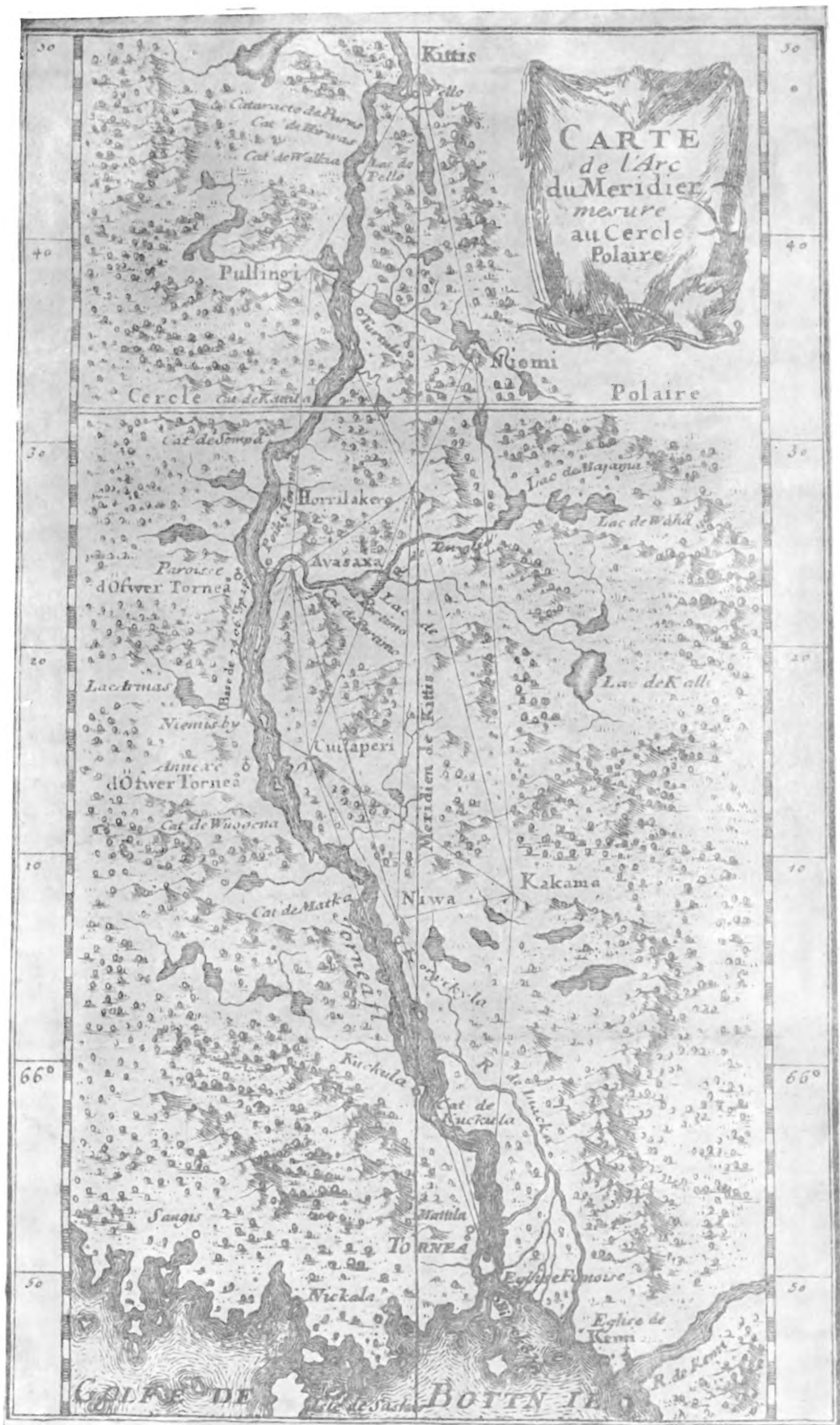
Le 13 Novembre 1737.

SUR LA MESURE DU DEGRE

DU ME'RIDIEN

AU CERCLE POLAIRE.

Заставка из книги Мопертюи „Фигура Земли“ (1738 г.).



Карта лапландского градусного измерения, приложенная к книге Мопертюи „Фигура Земли“.

А. КЛЕРО

ТЕОРИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ



A. CLAIRAUT



25 руб.